MotorControl Lab 操作与控制系统实验手册

2026-10-23 修订 | 电机控制虚拟实验室

软件版本：v1.0.0 | 手册适用版本：v1.0.0

作者与开发者：叶志钧博士（Dr. Jack Yeh）

MotorControl Lab 致力于建立一座可直接在网页上操作的电机控制虚拟实验室，将接近真实系统的马达动态、数位控制与功率转换行为，转化为可观察、可调整、可反复验证的学习与实验环境。希望让学习者从控制原理出发，透过即时仿真与波形分析，理解参数设定如何影响系统响应，缩短理论与实务之间的距离。

本平台兼顾教学与工程应用：教师与学生可用于课堂示范、自主学习及控制实验；工程师则可快速调整控制器、比较不同设计与验证仿真结果。在本平台涵盖的模型与功能范围内，使用者不必先另行搭建 MATLAB / Simulink 模型，即可直接在浏览器中进行初步分析与反复测试，减少模型建置与操作准备的时间。

本手册循序介绍 PMSM 的电流、速度与位置控制，并说明数位取样、PWM、电压限制、前馈及 anti-windup 的影响。公式采零初始条件；传递函数代表未饱和、小讯号的名义模型，实际时间波形则由含 PWM 切换的非线性模型计算。图中的英文名称与操作介面对照；HTML 版本可点选「放大查看」检视向量图细节。

版权声明：© 2026 叶志钧博士（Dr. Jack Yeh）。保留所有权利。 MotorControl Lab 自行开发之软体、教学内容，以及本手册的文字与图表，版权均属叶志钧博士所有。未经授权，不得重制、修改、散布或用于商业用途；所使用之第三方软体与资源，其权利归各自权利人所有，并依各自授权条款使用。

版本基准：2026-10-22 数值模型；2026-10-23 手册修订。包含 Mechanical Condition 与 Controller Output / Anti-Windup 诊断。

目录

1. 软体用途与快速开始 3

2. 模式与讯号路径 4

3. 参数、单位与预设值 6

4. 实际 PMSM 模型与各方块方程式 9

5. 控制回路传递函数 16

6. 数位控制与 PWM 时序 24

7. 波形与诊断读法 32

8. Bode 与 FFT 频谱分析 36

9. 六个实验 40

10. 资料汇出、常见问题与实验纪录 42

11. 附录：数位速度 / 位置模型 44

1. 软体用途与快速开始

1.1 页面各区功能

区域	操作与用途
语言 / Control Mode	选择 English、繁体中文或简体中文，以及 Current、Speed、Position 模式
控制方块图	点选任一 Block，在右侧检查与修改对应参数；被旁路的方块不参与该模式控制
参数面板	输入 PI 增益、马达参数、命令、限幅、PWM 与负载条件
Run / 执行模拟	以当下参数快照重新执行；Stop 可停止当次计算
结果指标	显示最终转速、最终 iq、峰值相电流、电压饱和比例与计算耗时
Simulation Time Cursor / 时序游标	回看指定时间的 CNT、active / pending CCR、ADC 及感测状态
Waveform instruments	切换控制响应、回授链、控制器 / AW 诊断、PWM / dead-time 波形
Loop Bode Analysis	选目前设定或上次模拟快照，检查回授与命令追踪频率响应
FFT / 频谱分析	选择已记录的时域讯号、来源与时间范围，计算频谱并汇出 FFT CSV；预设 Overview
CSV 汇出	保存该次结果、参数与 metadata；包含总览及末段高速资料

1.2 第一次操作

1. 开启既有 MotorControl Lab 页面。首次载入需连网，以载入 Plotly 与 Pyodide / NumPy；等待引擎就绪。

2. 选 Current Control Mode，点 Current Ref。

3. Mechanical Condition 选 Locked Rotor；设定 id=0 A、iq=5 A、Start=0.02 s、Duration=0.25 s。

4. 点 PMSM，把负载设为 0 N·m；保留其余预设值。

5. 执行模拟。在 dq current control 检查 iq 是否追上 5 A。

6. 切换 Controller Output / Anti-Windup，对照 q 轴 P、I、PI raw 及向量限幅前后电压。

7. 修改参数后必须重新执行。黄色「需重跑」提示表示图仍是上次结果，不能当成新设定的结果。

每次执行都从零电流、零速度、零机械角开始；不是接续上次模拟。Bode 若选「目前设定」，可以先于时间波形更新，比较时要确认使用相同快照。

2. 模式与讯号路径

2.1 Current Mode：电流控制

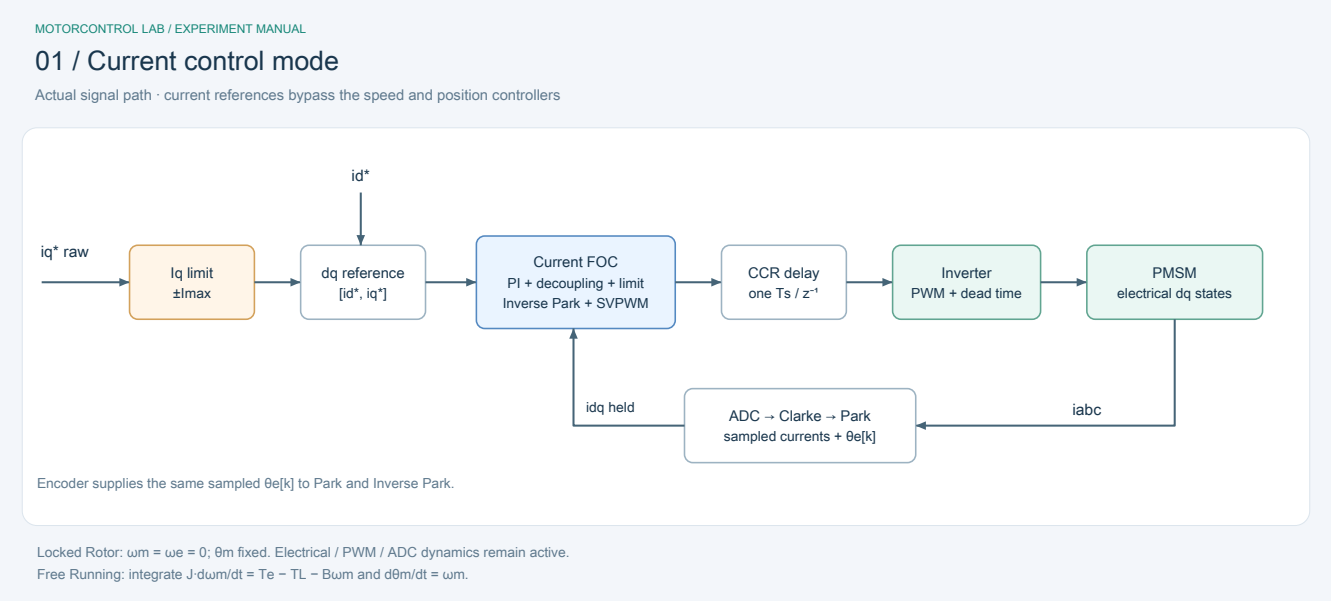

图 01 | Current Mode 实际电流控制讯号路径。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示讯号方向。

速度与位置控制器旁路。id 直接作为 d 轴命令；iq 经 q 轴电流命令限制。Current Mode 的 d 轴命令从模拟起点即生效，Start time 只控制 iq 阶跃。

Mechanical Condition 是实验操作条件：

• Locked Rotor（预设）：固定 ωm=0、ωe=0、θm=0。仅机械速度与角度不积分；dq 电流、转矩、inverter、dead-time、ADC 与 FOC 仍正常运算。锁定装置的反力未另列为波形。

• Free Running：完整积分机械动态。固定正 iq 会产生正转矩；无负载仍可能持续加速，最后因 back-EMF 与有限 DC bus 而无法维持电流。

机械条件仅对 Current Mode 生效。Speed / Position 一律使用自由机械动态。切换条件需重跑，并非执行中的即时锁转。

2.2 Speed Mode：速度控制

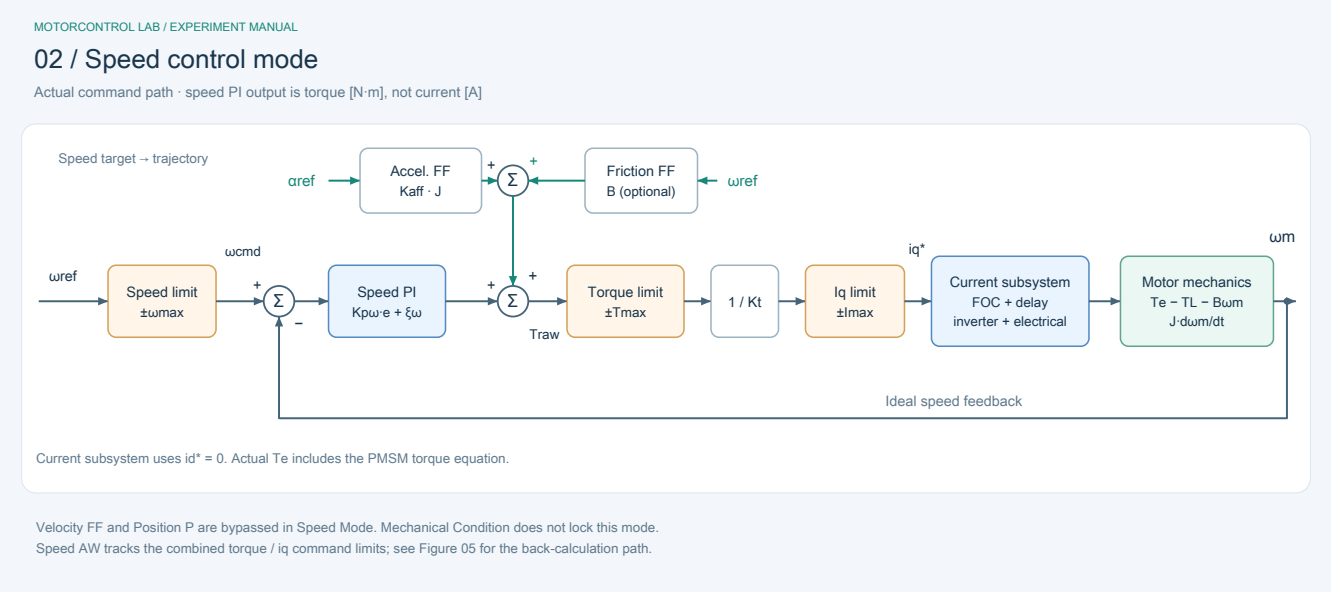

图 02 | Speed Mode 速度 PI、转矩 / 电流限制与内电流环。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示讯号方向。

速度 PI 输出单位为 N·m；经 1/Kt 转换后才是 A。此模式固定 id*=0，位置 P 与 Velocity FF 旁路。Acceleration FF 仍可使用。

2.3 Position Mode：位置控制

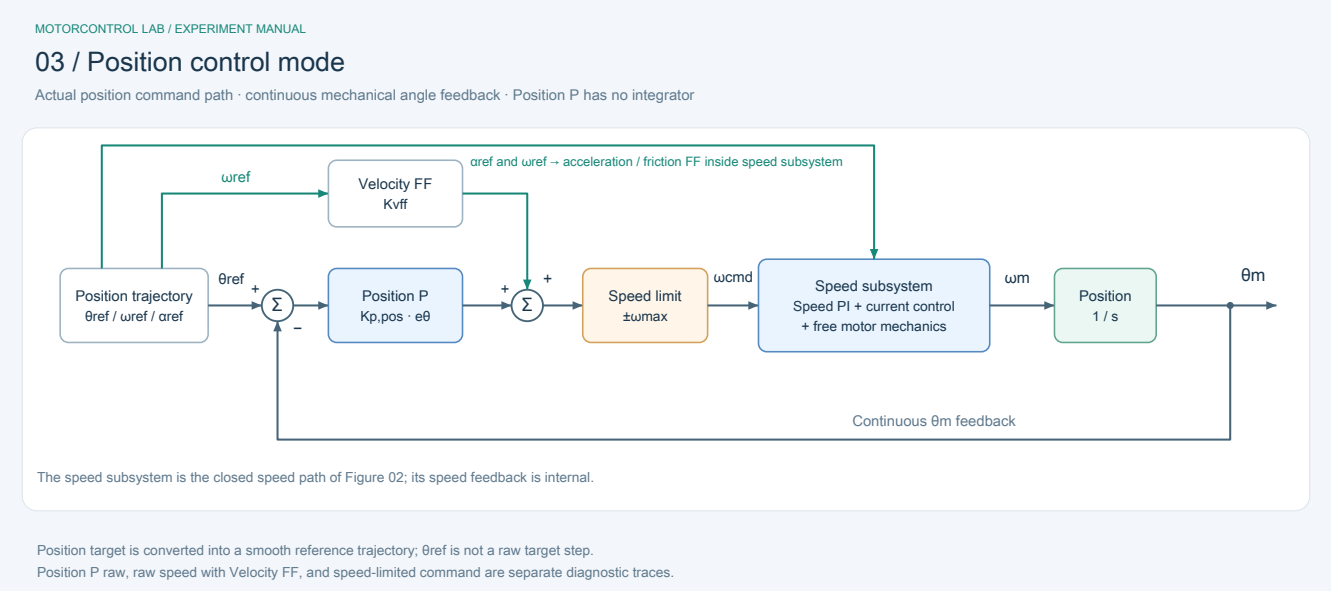

图 03 | Position Mode 位置 P、轨迹前馈与速度子系统。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示讯号方向。

位置回授使用连续、不 wrap 的 θm，单位 rad，可观察多圈运动。位置控制器只有 P，没有位置积分或位置 AW。

3. 参数、单位与预设值

3.1 马达与电力级

参数	意义	本版预设
Rs	每相等效电阻	1.2 Ω
Ld / Lq	d / q 轴电感	0.0057 / 0.0125 H
ψf	永磁磁链	0.03 Wb
p	极对数，总极数=2p	2
J	转动惯量	0.00016 kg·m²
B	黏滞摩擦系数	0.0000028 N·m·s/rad
Vdc	直流母线	48 V
m	线性调变限制系数	0.95
Td	dead time 平均模型参数	1 μs，启用
TL / Load time	负载转矩 / 加入时间	0.15 N·m / 0.15 s

本版 Kt=1.5pψf=0.09 N·m/A；电压向量限制约为 26.33 V。正负载 TL 会抵抗正向转动；此处为指定方向的常数转矩，不是随速度改变方向的摩擦模型。

3.2 控制器与命令

参数	本版预设	说明
Kpd / Kid	5.7 / 1200	V/A、V/(A·s)
Kpq / Kiq	12.5 / 1200	V/A、V/(A·s)
Current Kaw	300 s^{-1}	电压向量限幅回算
Kpω / Kiω	0.016 / 0.32	N·m/(rad/s)、N·m/rad
Speed Kaw	40 s^{-1}	转矩及 q 电流限制回算
Kp,pos	15 s^{-1}	位置误差 rad → 速度命令 rad/s
转矩限制 / iq 限制	1.8 N·m / 12 A	两个独立限幅
Speed mode limit	1000 rad/s	速度模式命令限制
Position speed limit	30 rad/s	位置控制器合成命令限制
速度目标	1500 rpm	预设 Speed Step
位置目标	1 rad	从零开始的轨迹
Current iq 命令 / id*	1 A / 0 A	5 A 是本手册实验值，非出厂预设
轨迹最大速度 / 加速度	10 rad/s / 100 rad/s^2	最大速度用于位置轨迹
Kvff / Kaff	1 / 1	速度、加速度前馈皆预设启用；摩擦前馈预设关闭
Start / Duration	0.02 s / 0.25 s	Duration 是总模拟时间，包含等待时间

Ki 输入连续增益，不要先乘 Ts。 程式在积分更新时自行乘上控制周期。改变 Rs、Ld、Lq、J 等参数不会自动重新整定 PI。

3.3 时间基准

参数	本版预设
要求 PWM 频率	10,000 Hz
Timer clock	100 MHz
ARR	5000
电流控制周期 Ts	100 μs
Speed divider M	1
速度 / 位置更新周期 Tω=M·Ts	100 μs
最少积分步 / PWM 周期	80
典型 plant 积分步长	1.25 μs；程式可自动缩小

Timer tick、plant 积分步长与控制周期是三个不同时间尺度。提高 ARR 不代表 plant 自动以每个 timer tick 积分。

4. 实际 PMSM 模型与各方块方程式

4.1 电气、转矩与机械模型

$$
\begin{aligned}
L_d\dot{i}_d &= v_d - R_s i_d + \omega_e L_q i_q, \\
L_q\dot{i}_q &= v_q - R_s i_q - \omega_e (L_d i_d + \psi_f), \\
T_e &= \frac{3}{2} p \left[\psi_f i_q + (L_d - L_q) i_d i_q\right], \\
J\dot{\omega}_m &= T_e - T_L - B\omega_m, \\
\dot{\theta}_m &= \omega_m, \qquad \omega_e = p\omega_m.
\end{aligned}
$$

自由运转时，程式用 midpoint RK2 积分四个状态 id、iq、ωm、θm。堵转时改为 ωm=0、θm 固定，电气方程依然积分。

两个转矩常数的定义：Kt 与 Kτ（单位均为 N·m/A）

这两个符号对应不同的方块，不能只因为单位相同，就当成同一个参数。本文以拉丁字母 t 表示 Kt，以希腊字母 tau（τ）表示 Kτ。

符号	明确定义	在程式与讯号路径中的用途
Kt：名义永磁转矩常数	Kt = (3/2)pψf	命令换算用：速度 PI 输出的转矩命令先经限制，再用 1/Kt 换成 q 轴电流命令。这不是内电流环的传递函数。
Kτ：固定 d 轴工作点的增量转矩常数	Kτ = ∂Te/∂iq，固定 id=id0	马达产生转矩用：小讯号 Δiq 经 Kτ 形成 ΔTe，包含该工作点的磁阻转矩效应。

$$
K_t = \frac{3}{2} p\psi_f, \qquad i^*_{q,raw} = \frac{T_{lim}}{K_t}.
$$

Kτ 的来源：由 PMSM 转矩公式逐步推导

步骤 1 | 从完整 PMSM 电磁转矩方程出发。 永磁转矩与磁阻转矩都保留：

$$
T_e(i_d, i_q) = \frac{3}{2} p \left[\psi_f i_q + (L_d - L_q) i_d i_q\right].
$$

步骤 2 | 把 d 轴电流固定在工作点 id=id0。 此时 id0 是常数，将 iq 提出来：

$$
T_e(i_{d0}, i_q) = \frac{3}{2} p \left[\psi_f i_q + (L_d - L_q) i_{d0} i_q\right] = \frac{3}{2} p \left[\psi_f + (L_d - L_q) i_{d0}\right] i_q.
$$

固定的是 d 轴电流 id；接下来让 q 轴电流 iq 改变。这里不是令 id=iq，也不是对时间微分；「固定 id」也不等于 Locked Rotor（固定机械转速）。

步骤 3 | 在 id 固定时，对 iq 取偏导数。 中括号内的量对 iq 都是常数，因此微分结果就是 iq 前面的系数：

$$\begin{aligned} K_\tau &\equiv \left.\frac{\partial T_e}{\partial i_q}\right|_{i_d=i_{d0}} \\ &= \frac{3}{2}p\left[\psi_f\frac{\partial i_q}{\partial i_q} + (L_d - L_q)i_{d0}\frac{\partial i_q}{\partial i_q}\right] \\ &= \frac{3}{2}p\left[\psi_f + (L_d - L_q)i_{d0}\right]. \end{aligned}$$

所以 Kτ 就是「d 轴电流保持 id0 时，q 轴电流每增加 1 A，电磁转矩增加多少 N·m」的斜率，单位是 N·m/A；它是工作点的增量转矩常数，不是 PI 增益或电流环传递函数。

步骤 4 | 换成方块图使用的增量关系。 令工作点 q 轴电流为 iq0、工作点转矩为 Te0，并令 iq=iq0+Δiq：

$$T_{e0} = \frac{3}{2}p\left[\psi_f + (L_d - L_q)i_{d0}\right]i_{q0},$$

$$\begin{aligned} \Delta T_e &\equiv T_e(i_{d0}, i_{q0} + \Delta i_q) - T_{e0} \\ &= \frac{3}{2}p\left[\psi_f + (L_d - L_q)i_{d0}\right]\Delta i_q \\ &= K_\tau \Delta i_q \qquad (\Delta i_d = 0). \end{aligned}$$

因此，方块图中的 Δiq → Kτ → ΔTe 就来自以上偏导数。对本手册采用的固定参数 PMSM 方程，在 id 严格固定时，上述增量关系本身是精确的；将它放入整个速度 Bode 模型时，仍采名义解耦、未饱和的小讯号分析条件。

此处 p 是极对数，ψf 是永磁磁链，id0 是分析工作点的 d 轴电流；Δ 表示工作点附近的小变动。固定 id 是使用单一 Kτ 方块的条件。若 d 轴也有扰动，一般线性化还包含下式第二项，不能直接用单一路径概括：

$$\Delta T_e = K_\tau \Delta i_q + \frac{3}{2}p(L_d - L_q)i_{q0}\Delta i_d.$$

id0=0 或 Ld=Lq 时，Kτ=Kt。非零 d 轴电流且 Ld≠Lq 时，实际转矩含磁阻转矩，不能一律把 Te 当成 Kt·iq。一般非线性时间模拟仍使用完整 PMSM 转矩方程，不把 Kτ 当成额外可调马达参数。

目前 Speed / Position 模式采 id*=0，名义分析使用 id0=0，因此两者相同。以预设 p=2、ψf=0.03 Wb 为例，Kt=Kτ=0.09 N·m/A；此相等关系不代表电流闭环 Tq(s) 可以省略。速度回路完整转矩路径见第 5.4 节。

4.2 Clarke、Park 与感测器

Clarke 为 amplitude-invariant：

$$i_\alpha = \frac{2i_a - i_b - i_c}{3}, \qquad i_\beta = \frac{i_b - i_c}{\sqrt{3}}.$$

Park 与 Inverse Park：

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} v_\alpha^* \\ v_\beta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & -\sin\theta_e \\ \sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{d,sat} \\ v_{q,sat} \end{bmatrix}.$$

Encoder 为理想感测器：θe=(pθm) mod 2π；没有量化、杂讯或 observer。Park 与 Inverse Park 使用同一 ADC 事件锁存的角度。座标转换是矩阵运算，通常不以单一 scalar transfer function 表示；角度固定时可视为常数矩阵。

4.3 电流 PI、解耦与向量限幅

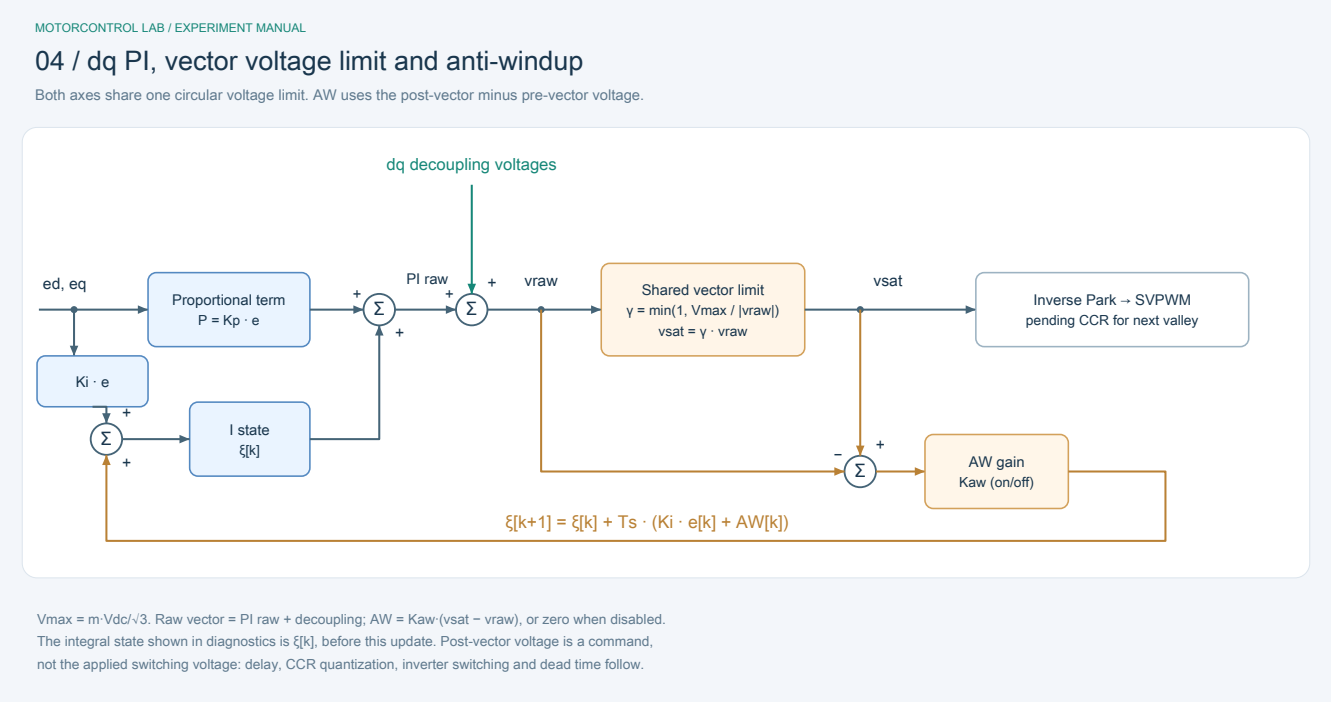

图 04 | dq PI、共用向量电压限幅与 AW 回算。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示讯号方向。

对 a∈{d,q}：

$$e_a = i_a^* - i_{a,held}, \qquad u_{a,PI} = K_{pa} e_a + x_a.$$

启用 decoupling 时：

$$v_{d,ff} = -\omega_e L_q i_{q,held}, \qquad v_{q,ff} = \omega_e (L_d i_{d,held} + \psi_f).$$

关闭时两个前馈项为零。向量限幅前电压包含解耦项：

$$\boldsymbol{v}_{raw} = \begin{bmatrix} u_{d,PI} + v_{d,ff} \\ u_{q,PI} + v_{q,ff} \end{bmatrix}, \quad V_{max} = m\frac{V_{dc}}{\sqrt{3}}, \quad \gamma = \min\left(1, \frac{V_{max}}{\|\boldsymbol{v}_{raw}\|}\right), \quad \boldsymbol{v}_{sat} = \gamma \boldsymbol{v}_{raw}.$$

零向量时取 γ=1。这是共享圆形向量限幅，不是 d、q 各自裁切 ±Vmax。

$$AW_a = \begin{cases} K_{aw}(v_{a,sat} - v_{a,raw}), & AW\ on \\ 0, & AW\ off \end{cases}$$

$$x_a[k+1] = x_a[k] + T_s\{K_{ia} e_a[k] + AW_a[k]\}.$$

先用 x[k] 算输出，再更新 x[k+1]。正向饱和时，AW 通常为负，抑制积分继续增长；但 I state 不一定因此变小或回到零，仍取决于 Ki·e 与 AW 的合成值。

4.4 Speed PI、限制与回算

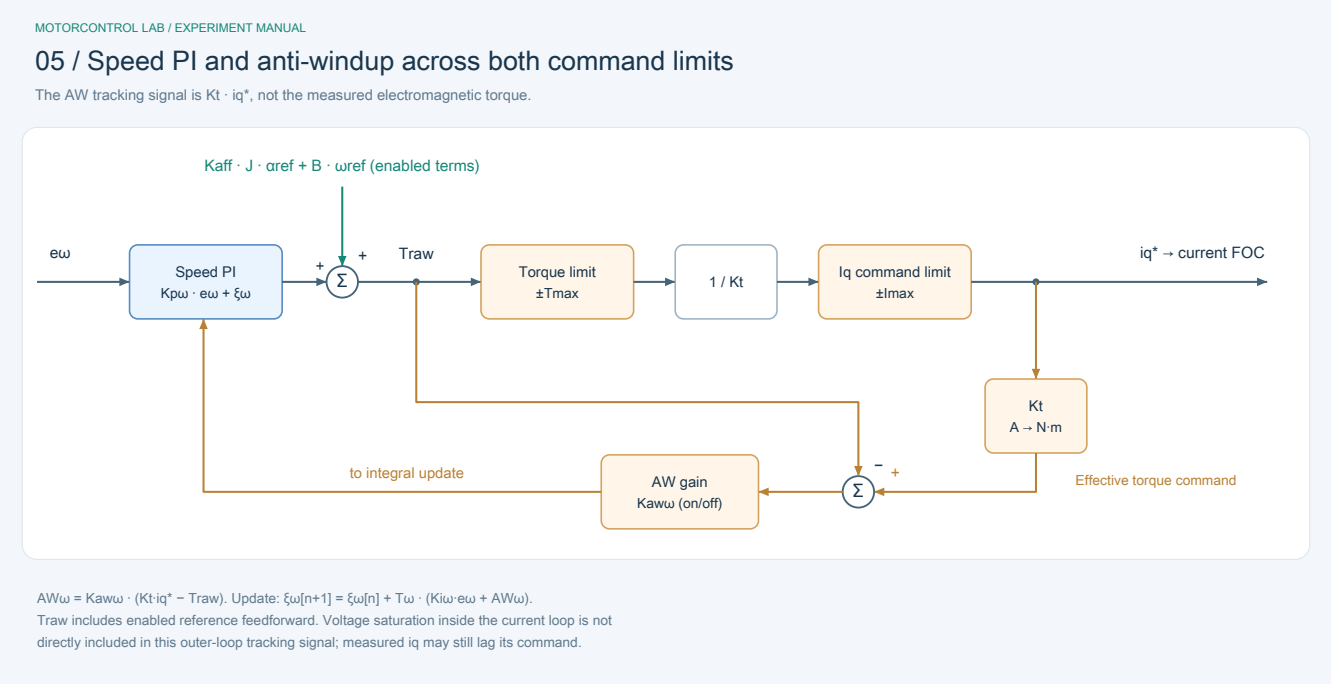

图 05 | Speed PI 跨转矩与电流命令限制的 AW 回算。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示讯号方向。

$$e_\omega = \omega_{cmd} - \omega_m, \quad T_{fb} = K_{p\omega} e_\omega + x_\omega.$$

令开关 σa、σB∈{0,1}：

$$T_{raw} = T_{fb} + \sigma_a K_{aff} J \alpha_{ref} + \sigma_B B \omega_{ref},$$

$$T_{lim} = \mathrm{clip}(T_{raw}, \pm T_{max}), \quad i^*_{q,raw} = \frac{T_{lim}}{K_t}, \quad i^*_q = \mathrm{clip}(i^*_{q,raw}, \pm I_{max}).$$

$$AW_\omega = \begin{cases} K_{aw\omega}(K_t i^*_q - T_{raw}), & AW\ on \\ 0, & AW\ off \end{cases}$$

$$x_\omega[n+1] = x_\omega[n] + T_\omega(K_{i\omega} e_\omega[n] + AW_\omega[n]).$$

回算同时包含转矩及电流命令限幅，并以含前馈的 Total raw 为基准。它没有直接追踪因电压不足造成的实际 iq 落后；因此 Te* 未碰转矩 / 电流限制时，速度 AW 可能为零，即使内电流环已电压饱和。

4.5 Position P、轨迹与前馈

$$\omega_{fb} = K_{p,pos}(\theta_{ref} - \theta_m), \quad \omega_{raw} = \omega_{fb} + \sigma_v K_{vff} \omega_{ref}, \quad \omega_{cmd} = \mathrm{clip}(\omega_{raw}, \pm \omega_{max}).$$

4.5.1 先分清位置、速度与加速度的曲线

Trajectory Generator 在 Position 模式产生的是分段位置轨迹，不是一条从头到尾使用同一组系数的抛物线。加速段的位置是二次函数，等速段的位置是一次函数，减速段的位置是另一个二次函数；运动前后位置保持常数。对应的速度是分段直线，加速度是分段常数。本版没有 S-curve / jerk 限制，加速度在阶段切换时可跳变。

本版每次从位置 θ=0、速度=0 开始，到指定目标 θf 停下；不提供任意初始位置、初始速度或直接输入多项式系数的功能。定义：

$$\theta_f = \text{Target Position}, \qquad D = |\theta_f|, \qquad \sigma = \operatorname{sgn}(\theta_f), \qquad u = t - t_0.$$

t 是模拟时间，t0 是 UI 的 Start / Reference step time，u 是「从轨迹开始后算起」的局部时间。V 是 Max Velocity (position)，A 是 Max Acceleration，两者输入正的上限幅值；负向移动由 θf 的正负号决定。

$$t_a = \min\left(\frac{V}{A}, \sqrt{\frac{D}{A}}\right), \qquad v_p = A t_a, \qquad t_c = \max\left(0, \frac{D}{v_p} - t_a\right), \qquad T = T_{move} = 2t_a + t_c.$$

ta 是加速时间，对称减速也用 ta；tc 是等速时间；vp 是实际规划峰值速度，可能小于设定的 V。D≤V²/A 时 tc=0，为三角形速度轨迹；D>V²/A 时才有等速段，为梯形速度轨迹。D=0 为全程静止的特例，不使用上式的除法。规划完成时间是 t0+T；模拟 Duration 还应留足定位收敛时间。

4.5.2 程式实际使用的分段方程式

以下为 D>0 时的位置参考，与目前 Python trajectory 函式一致：

$$\theta_{ref}(t) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \sigma \frac{A}{2} u^2, & 0 \le u < t_a, \\ \sigma \left[\frac{A}{2} t_a^2 + v_p (u - t_a)\right], & t_a \le u < t_a + t_c, \\ \theta_f - \sigma \frac{A}{2} (T - u)^2, & t_a + t_c \le u < T, \\ \theta_f, & u \ge T. \end{cases}$$

二次曲线出现在上式的加速段与减速段。 tc=0 时中间的等速段长度为零，自动省略；仍有前后两段不同的二次函数，不是只使用一条二次曲线。

速度与加速度参考由同一条位置轨迹解析求导，供前馈使用：

$$\omega_{ref}(t) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \sigma A u, & 0 \le u < t_a, \\ \sigma v_p, & t_a \le u < t_a + t_c, \\ \sigma A (T - u), & t_a + t_c \le u < T, \\ 0, & u \ge T, \end{cases}$$

$$\alpha_{ref}(t) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \sigma A, & 0 \le u < t_a, \\ 0, & t_a \le u < t_a + t_c, \\ -\sigma A, & t_a + t_c \le u < T, \\ 0, & u \ge T. \end{cases}$$

位置与速度在交界处连续；加速度在交界处采右侧阶段的值，与程式的区间判断相同。上述是「参考轨迹」，不代表实际 θm、ωm、dωm/dt 一定跟得上。

4.5.3 二次式系数如何由 UI 决定

若把每一段都写成同一个局部时间 u 的多项式：

$$\theta_{ref} = c_2 u^2 + c_1 u + c_0,$$

其系数不是独立输入，而是由 A、V、θf 算出 ta、tc、T 后决定：

阶段	c2（rad/s²）	c1（rad/s）	c0（rad）
加速	σA/2	0	0
等速	0	σvp	−σA·ta²/2
减速	−σA/2	σA·T	θf−σA·T²/2
完成后保持	0	0	θf

UI 的 Max Acceleration=A 是加速度，不是二次项系数。 因为位置微分两次会得到 2c2，所以加速段 c2=σA/2；例如 A=100，正向加速段的二次项系数就是 50，不是 100。上述系数以 u=t−t0 表示，不要直接把 u 换成全域时间 t 而仍沿用相同系数。

UI 参数	对曲线的作用	实际设定方法
Target Position / θm* continuous	决定位移大小、方向与最后位置 θf	Position Control 的目标位置，或 Trajectory Generator 的 Target Position；共用同一参数
Max Acceleration	设定 A，改变加速 / 减速段的曲率，即 ±A/2	点 Trajectory Generator 修改；数值愈大代表规划加减速愈快
Max Velocity (position)	设定速度上限 V，影响峰值速度、是否有等速段及总时间	点 Trajectory Generator 修改；短行程不一定达到 V
Start / Reference step time	设定 t0，只平移整段轨迹的开始时间	点 Target Position 修改；不改变以 u 表示的各段系数
Duration	设定模拟总长度，不是多项式系数	应涵盖 Start+Tmove，并留收敛时间；太短只会截断观察

Position Kp、Kvff、Kaff 影响回授 / 前馈如何追踪轨迹，不用来设定轨迹多项式系数。Speed profile 的 Step / Ramp 只作用于 Speed 模式，在 Position 模式不生效。

4.5.4 实验五的二次式与系数实例

实验五设定 θf=1 rad、V=10 rad/s、A=100 rad/s²、t0=0.02 s。由此得到 ta=0.1 s、tc=0、T=0.2 s，局部时间为 u=t−0.02：

$$\theta_{ref}(t)=\begin{cases}0, & t<0.02,\\ 50(t-0.02)^2, & 0.02\le t<0.12,\\ 1-50(0.22-t)^2, & 0.12\le t<0.22,\\ 1, & t\ge 0.22.\end{cases}$$

等价地，用 u 展开为：

$$\theta_{ref}=\begin{cases}50u^2, & 0\le u<0.1,\\ -50u^2+20u-1, & 0.1\le u<0.2.\end{cases}$$

加速段的 (c2,c1,c0)=(50,0,0)；减速段为 (−50,20,−1)。两段使用相同的 u=t−0.02，只是分段系数不同；不是让使用者把三个系数分别填进 UI。

模拟时间 t (s)	局部时间 u (s)	位置参考 θref (rad)	速度参考 ωref (rad/s)
0.02	0	0	0
0.07	0.05	0.125	5
0.12	0.10	0.5	10
0.17	0.15	0.875	5
0.22	0.20	1	0

因此，想改变二次段的弯曲程度，要改 Max Acceleration；想改位移或方向，要改 Target Position；想改速度上限，要改 Max Velocity。三者仍须共同满足「从静止出发、到目标停止」的分段边界条件，不能任意指定独立 c2、c1、c0。

4.5.5 Speed 模式的 Step / Ramp

Speed Step 在起点直接改变速度参考，程式设定 αref=0，不产生理想微分脉冲前馈。Speed Ramp 则以 A 限制加速，直到速度目标。轨迹产生器及各限幅均为非线性 / 分段运算，没有涵盖全部行为的单一 LTI 传递函数。

4.6 SVPWM、Timer 与 inverter

$$v_a^* = v_\alpha^*, \quad v_b^* = -\frac{1}{2}v_\alpha^* + \frac{\sqrt{3}}{2}v_\beta^*, \quad v_c^* = -\frac{1}{2}v_\alpha^* - \frac{\sqrt{3}}{2}v_\beta^*,$$

$$v_0 = -\frac{\max(v_a^*, v_b^*, v_c^*) + \min(v_a^*, v_b^*, v_c^*)}{2}, \quad D_x = \mathrm{clip}\left(\frac{1}{2} + \frac{v_x^* + v_0}{V_{dc}}, 0, 1\right).$$

$$ARR = \mathrm{round}\left(\frac{f_{timer}}{2f_{requested}}\right), \quad f_{PWM,actual} = \frac{f_{timer}}{2ARR}, \quad CCR_x = \mathrm{round}(D_x ARR).$$

CNT 为 0→ARR→0 的三角载波；Sx=1 当 CNT<active CCRx，否则为 0。

$$v_{xO} = S_x V_{dc} + \Delta v_{xO}, \quad \Delta v_{xO} = -V_{dc} T_d f_{PWM}\,\mathrm{sgn}(i_x), \quad v_{xn} = v_{xO} - \frac{v_{aO} + v_{bO} + v_{cO}}{3}.$$

本模型是切换波形加上周期平均 dead-time 电压扰动，没有逐一模拟互补 gate blanking、二极体压降或寄生元件。未饱和平均小讯号模型中，电压命令到平均电压可取单位增益，再单独处理 hold / 延迟；不能再额外乘一次 Vdc，因为输入已是 V。

5. 控制回路传递函数

5.1 使用条件与符号

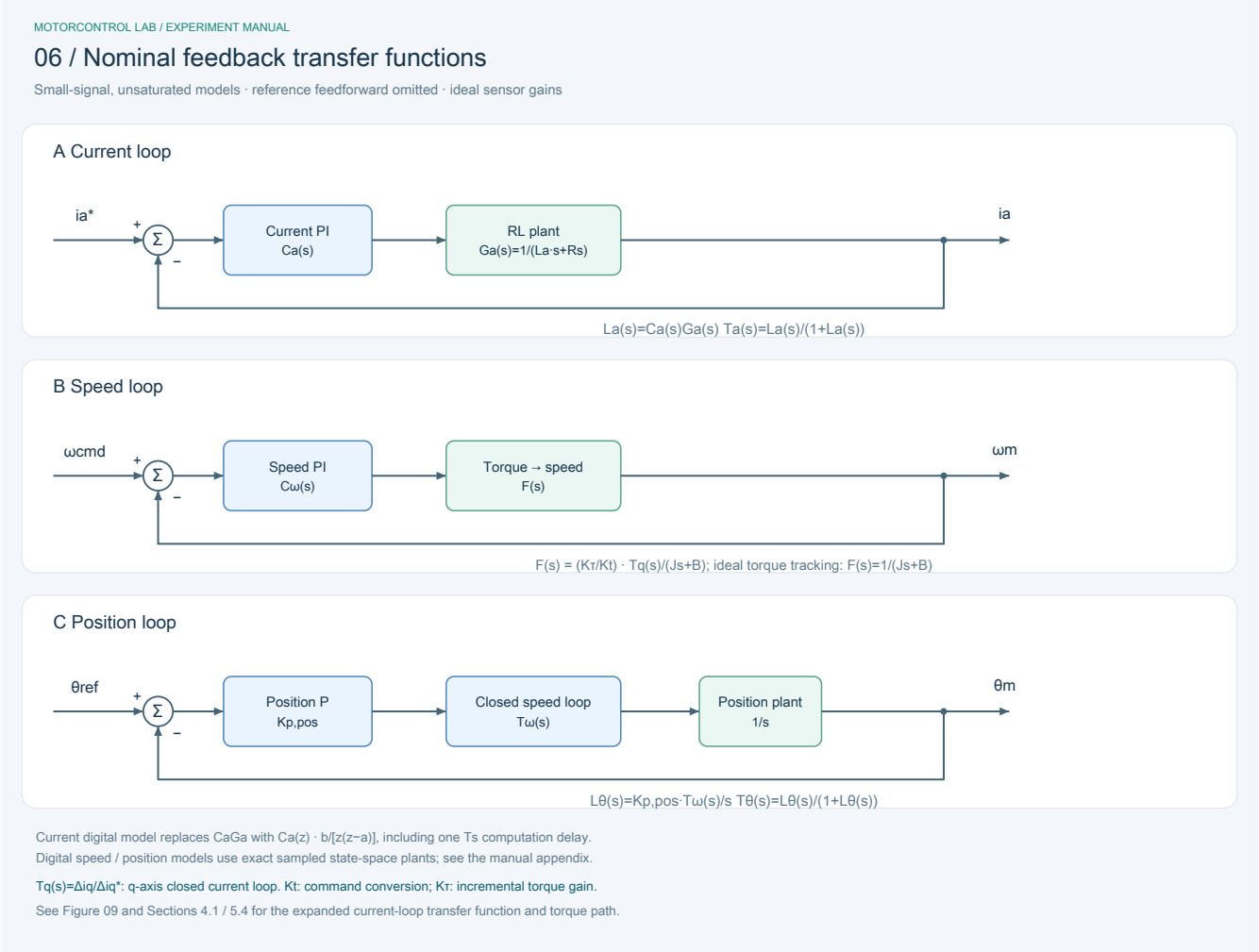

图 06 | 电流、速度与位置的名义负回授传递函数。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示讯号方向。

以下连续模型假设理想 dq 解耦、固定名义参数、未碰限幅，并以平均电压取代 switching ripple；暂不含 ADC / 运算延迟与 dead-time 非线性。s 为 Laplace 变数；z 为离散时间变数。回授感测器名义增益 H=1。

5.2 各 Block 的数学表示速查

页面 Block	名义线性表示 / 实际运算	适用范围
Current PI d/q	Ca(s)=Kpa+Kia/s；数位 Ca(z)=Kpa+Kia·Ts/(z−1)	AW 与限幅另依第 4 节
PMSM electrical	Ga(s)=1/(La·s+Rs)	理想解耦或零速；非完整耦合 PMSM
Speed PI	Cω(s)=Kpω+Kiω/s	输入 rad/s、输出 N·m
1/Kt	常数增益 1/(1.5pψf)	输入 N·m、输出 A
Torque production	局部 q 轴增益 Kτ	固定 d 轴工作点；一般 Te 为非线性
Mechanical speed	Gm(s)=1/(Js+B)	输入净电磁 / 负载转矩；堵转时不使用自由机械 plant
Speed → position	1/s	连续自由转动模型；离散分析精确积分位置状态
Position P	Cθ=Kp,pos	无位置 I / AW
Velocity FF	Kvff	ωref→速度求和点，仅 Position
Acceleration FF × J	Kaff·J	输入 αref 时为常数增益；以 ωref 为输入才表示为 Kaff·J·s
Friction FF	B	ωref→转矩求和点，受开关控制
Encoder speed/position feedback	名义 H=1；θm→电角为 p 倍后 wrap	理想感测；wrap 不属单一全域 LTI 方块
Clarke / Park / Inverse Park	第 4.2 节矩阵	转角可随时间变化，不以单一 scalar TF 概括
ADC sample/hold	离散同步取样与保持	已纳入数位回路定义；不是额外随意加的时间延迟
Computation / CCR update	z^{-1}	一个 current Ts
SVPWM / inverter	平均、未饱和电压命令通道可近似增益 1	实际为 duty 计算、量化、PWM 切换及 dead-time 扰动
Trajectory / limits / AW	分段轨迹、clip、向量缩放与状态更新	非线性运算，不强行赋予全域 LTI TF

5.3 d / q 电流回路

解耦后的 plant 与 PI：

$$G_d(s)=\frac{1}{L_d s+R_s},\quad G_q(s)=\frac{1}{L_q s+R_s},\quad C_a(s)=K_{pa}+\frac{K_{ia}}{s}.$$

$$L_a(s)=C_a(s)G_a(s)=\frac{K_{pa}s+K_{ia}}{s(L_a s+R_s)},$$

$$T_a(s)=\frac{i_a}{i_a^*}=\frac{L_a}{1+L_a}=\frac{K_{pa}s+K_{ia}}{L_a s^2+(R_s+K_{pa})s+K_{ia}}.$$

若 Kpa=La·ωc、Kia=Rs·ωc，理想连续模型可约去 RL 极点：

$$L_a(s)=\frac{\omega_c}{s},\qquad T_a(s)=\frac{\omega_c}{s+\omega_c}.$$

本版预设两轴均有 ωc=1000 rad/s，因此理想频宽为 1000/(2π)≈159.15 Hz。网页 Bode 分析区中的 d / q 电流回路频率响应 采含离散延迟模型，数值不必等于此理想值。 堵转时即使关闭解耦，ωe=0 仍使旋转耦合项消失。

上式令 a=q 即为 Tq(s)。第 5.4 节会再次明确标示其输入、输出与完整展开式，避免在速度回路中把 Tq(s) 误认为转矩常数。

5.4 速度回路：三种模型

先看 UI 的 Speed model 三选项对照表。 这里的 Speed model 是 Bode 分析用的「速度模型」，与页面上方 Current / Speed / Position 的 Control Mode 不同。

Speed model 选项	内电流环如何处理	是否包含数位延迟
Ideal Inner Current Loop	假设电流 / 转矩即时追踪，Tq=1；不保留内电流环动态	不考虑取样 / 运算延迟
With Current Loop Dynamics	使用连续 q 轴电流闭环；一般未约分式为二阶，目前预设极零点对消后可约成一阶	不考虑取样 / 运算延迟
With Digital Delay	同时保留电流环动态，使用离散 PI 与精确 ZOH plant	包含一个电流控制周期的运算 / CCR 更新延迟，以及已纳入的取样 / 保持效应

第三个不是只加 delay、把电流环动态拿掉，而是将两者一起纳入。 它也不是把第二个的连续闭环直接乘上 exp(−1.5sTs)，而是由离散系统计算。1.5Ts 是理解低频平均延迟的连续近似，详见第 5.4.2 节；不要额外重复加入目前数位模型。

选项影响范围： 切换 Speed model 会改变速度 / 位置 Bode 的分析模型，不会切换时间模拟引擎。d / q 电流 Bode 一直使用第 6 节的含延迟离散模型，不会因选 Ideal 而变成理想增益 1。时间模拟仍使用同一套实际电流控制、ADC / CCR 时序与 PWM 切换模型。

以下再依序给出三种速度分析模型的公式；预设一阶约分见第 5.4.1 节，精确数位模型见第 6 节与附录。

$$C_\omega(s)=K_{p\omega}+\frac{K_{i\omega}}{s},\qquad G_m(s)=\frac{1}{Js+B}.$$

Ideal inner current loop：假定转矩即时追踪，令 F(s)=Gm(s)：

$$L_\omega^{ideal}(s) = \frac{K_{p\omega}s + K_{i\omega}}{s(Js + B)},$$

$$T_\omega^{ideal}(s) = \frac{K_{p\omega}s + K_{i\omega}}{Js^2 + (B + K_{p\omega})s + K_{i\omega}}.$$

代入预设值：

$$T_\omega^{ideal}(s) = \frac{0.016s + 0.32}{0.00016s^2 + 0.0160028s + 0.32}.$$

理想转矩追踪时，负载扰动的响应为：

$$\frac{\omega_m(s)}{T_L(s)} = -\frac{G_m(s)}{1 + C_\omega(s)G_m(s)}.$$

With current-loop dynamics：明确包含 q 轴电流闭环 Tq(s)

这里的 Tq(s) 是「q 轴电流命令 → 实际 q 轴电流」的闭环传递函数，不是转矩常数，也不是速度闭环。下标 q 指 q 轴；比值的输入、输出都是电流，因此 Tq(s) 无因次。以下各传递函数以工作点附近的增量定义：

$$\boxed{T_q(s) \equiv \frac{\Delta i_q(s)}{\Delta i_q^*(s)}}.$$

q 轴名义解耦电气 plant、电流 PI 与开回路分别为：

$$G_q(s) = \frac{\Delta i_q(s)}{\Delta v_q(s)} = \frac{1}{L_q s + R_s}, \qquad C_q(s) = K_{pq} + \frac{K_{iq}}{s}, \qquad L_q^{OL}(s) = C_q(s)G_q(s).$$

此处上标 OL 表示开回路，避免与电感 Lq 混淆。由单位负回授闭合电流环：

$$\boxed{T_q(s) = \frac{C_q(s)G_q(s)}{1 + C_q(s)G_q(s)} = \frac{C_q(s)}{L_q s + R_s + C_q(s)}}.$$

将电流 PI 展开，就能直接看见 Kpq、Kiq 与 Lq、Rs：

$$\boxed{T_q(s) = \frac{K_{pq}s + K_{iq}}{L_q s^2 + (R_s + K_{pq})s + K_{iq}}}.$$

预设 Lq=0.0125 H、Rs=1.2 Ω、Kpq=12.5、Kiq=1200，故本版连续 q 轴闭环为：

$$T_q(s) = \frac{12.5s + 1200}{0.0125s^2 + 13.7s + 1200}.$$

5.4.1 一般为二阶；预设极零点对消后可约成一阶

上面的分母二次式是一般 PI 参数的未约分闭环形式。目前预设参数已经做名义 RL 极点与 PI 零点对消，因此此连续输入 / 输出传递函数的最小阶数是一阶。 不能只停在二阶式，而忽略这个预设条件。

对消条件与预设值为：

$$\frac{K_{iq}}{K_{pq}} = \frac{R_s}{L_q}, \qquad \frac{1200}{12.5} = \frac{1.2}{0.0125} = 96\ \mathrm{s}^{-1}.$$

此时 PI 零点与电气 plant 极点同在 s=−96 s⁻¹。将一般式因式分解：

$$\begin{aligned} T_q(s) &= \frac{12.5s + 1200}{0.0125s^2 + 13.7s + 1200} \\ &= \frac{12.5(s+96)}{0.0125(s+96)(s+1000)} \\ &= \boxed{\frac{1000}{s+1000} = \frac{1}{0.001s+1}}. \end{aligned}$$

一般化地，在精确对消条件下：

$$C_q(s)G_q(s) = \frac{K_{pq}}{L_q s} = \frac{\omega_c}{s}, \qquad T_q(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}, \qquad \omega_c = \frac{K_{pq}}{L_q}.$$

所以预设 ωc=1000 rad/s、时间常数 1/ωc=1 ms、连续无延迟 −3 dB 频宽约 1000/(2π)=159.15 Hz。这是零初始条件下的传递函数约分，不是删除模拟器的积分器或马达状态。若改过 PI、Rs 或 Lq 而未维持对消条件，就应回到一般二阶式；参数误差、未完全解耦、数位取样及延迟也会使理想结果不再精确适用。

这里的一阶 Tq(s) 仍是 With current-loop dynamics 的「无延迟连续模型」。 下一个延迟说明小节会解释，为何加进回路内的延迟后，不能直接宣称整个闭环仍是这个无延迟一阶式。

先分开看 1/Kt、Tq(s)、Kτ 与 Gm(s) 四个方块，再合并成速度 PI 所见的 F(s)： 转矩命令先以 1/Kt 换算成电流命令，电流闭环 Tq(s) 产生实际 iq，马达以 Kτ 转成电磁转矩，最后经机械动态 Gm(s) 产生速度。此为忽略限幅、前馈与负载扰动输入的名义回授分析路径。

$$\Delta T_e^* \xrightarrow{1/K_t} \Delta i_q^* \xrightarrow{T_q(s)} \Delta i_q \xrightarrow{K_\tau} \Delta T_e \xrightarrow{G_m(s)} \Delta \omega_m.$$

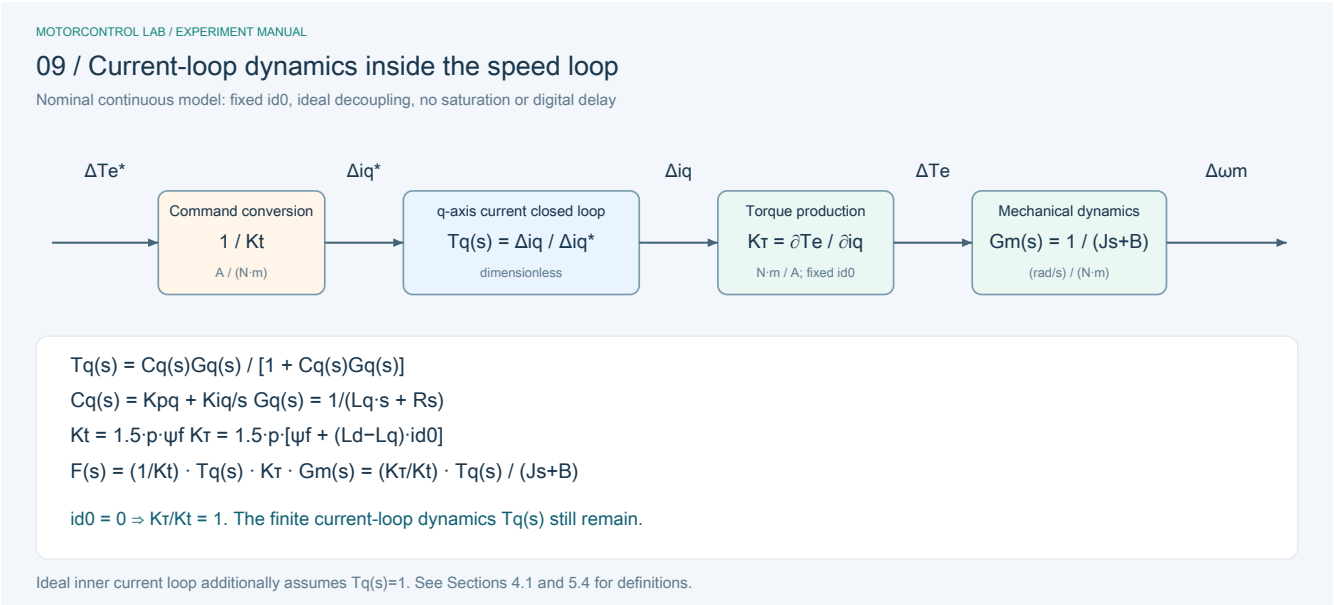

图 09 | Tq(s) 表示命令电流到实际电流的闭环响应；1/Kt 是命令换算，Kτ 是固定 d 轴工作点的马达增量转矩增益。

$$F(s) \equiv \frac{\Delta\omega_m(s)}{\Delta T_e^*(s)} = \frac{1}{K_t}\, T_q(s)\, K_\tau\, G_m(s) = \frac{K_\tau}{K_t} T_q(s) \frac{1}{Js+B}.$$

在外速度单位负回授下：

$$L_\omega(s) = C_\omega(s)F(s), \qquad T_\omega(s) = \frac{\Delta\omega_m(s)}{\Delta\omega_m^*(s)} = \frac{C_\omega(s)F(s)}{1 + C_\omega(s)F(s)}.$$

Kt、Kτ 的正式定义与线性化条件见第 4.1 节。 目前 Speed / Position 的名义工作点 id0=0，所以 Kτ/Kt=1，但仍有：

$$F(s) = T_q(s)G_m(s) \neq G_m(s) \quad （一般情况）.$$

因此，消掉的是 Kτ/Kt，比值为 1；并没有消掉 Tq(s)。只有选择 Ideal inner current loop、假设电流 / 转矩即时追踪时，才令 Tq(s)=1。With current-loop dynamics 使用上述连续电流闭环，忽略取样 / 运算延迟；其模型假设为名义理想 dq 解耦、未饱和、固定 d 轴工作点，不包含 dead-time、CCR 量化、限幅或 AW 非线性。时间模拟仍使用完整切换 / 控制模型。

With digital delay：含离散 current PI、一个电流控制周期运算延迟、精确 held-voltage plant 及外环多速率保持，不能直接套用上述连续二阶式。完整定义见第 6 节与附录。

5.4.2 延迟的连续近似：为何常见 1.5Ts，而不是再多一个完整周期

本节是教学用的连续平均 / 低频近似，不是新增 UI 模型，也没有改写目前 With digital delay 的精确离散计算。 以下 Ts 指电流回路的控制周期；目前每 PWM 周期取样、更新一次，因此 Ts=TPWM。令 Td,eq 代表总等效控制延迟，与功率级的 Dead Time / dead-time 死区时间不同。

核对本版程式时序：valley k 先套用上一轮 pending CCR，再锁存 ADC[k]；以此资料算出的新 duty / CCR[k+1]，要到 valley k+1 才启用。因此，从 ADC[k] 到新 CCR 生效是 一个 Ts，包含计算、传递与等待下一个更新点的整体排程延迟；不是另外量到 CPU 一定需要运算整整 Ts。浏览器显示的 Simulation Cost 也不是此控制延迟。

项目	本版的意义	连续平均 / 低频近似
取样到新 CCR 生效	ADC[k] → pending CCR[k+1] → 下一个 valley 套用	Ts
PWM / 命令保持的等效延迟	新 duty 在一个 PWM 周期内形成平均作用；以 ZOH / single-rate PWM 近似	Ts/2
合计	以上两个不同作用的合并近似	Td,eq≈1.5Ts

不能解读成「算一个 Ts，再等另一个完整 PWM 周期」。 下一个 valley 才启用新 CCR 的这一次等待，已包含在第一列的 Ts 里；第二列是保持 / 调变的等效半周期，不是额外的一拍暂存器。如果真的另有第二拍延迟，模型就必须另外辨识，不能仍套用本版的 1.5Ts。

从平均命令到平均输出的连续重建模型，可将一拍延迟与正规化 ZOH 写为：

$$D_{avg}(s) = e^{-sT_s}\frac{1 - e^{-sT_s}}{sT_s}.$$

ZOH 的频率响应可拆成幅值项与半周期相位项：

$$\frac{1-e^{-j\omega T_s}}{j\omega T_s} = e^{-j\omega T_s/2}\frac{\sin(\omega T_s/2)}{\omega T_s/2}.$$

当 ωTs 足够小，可近似忽略 sinc 幅值下降，故常用：

$$\boxed{D_{avg}(s) \approx e^{-sT_{d,eq}}, \qquad T_{d,eq} \approx T_s + \frac{T_s}{2} = 1.5T_s}.$$

这不是说所有同步取样系统都必然是 1.5Ts：结果仍取决于取样相位、更新点、运算能否赶上更新，以及 single-rate / double-rate 等配置。本版采 valley 取样与下一个 valley 生效，所以适用上述一拍加半周期的平均近似；未另加感测器、类比滤波或 ADC 转换延迟。

本版预设的实际时间换算： fPWM=10 kHz、ARR=5000、timer=100 MHz，所以：

$$T_s = \frac{2ARR}{f_{timer}} = 100\ \mu\text{s}, \qquad T_{d,eq} \approx 150\ \mu\text{s} = 0.15\ \text{ms}.$$

因此是 1.5 倍 Ts，不是 1.5 ms；只有 Ts=1 ms 时，1.5Ts 才等于 1.5 ms。预设电流闭环的一阶时间常数 1 ms，与这里的等效延迟 0.15 ms，也不是同一个量。当 fpwm / ARR 改变时应以实际 Ts 重算；speedDiv≠1 时，外环多速率模型不能直接换成 1.5 个速度周期。

延迟应放在哪里？放在电流回授回路内的致动通道。 在上述连续近似下：

$$L_{q,d}(s) \approx C_q(s)G_q(s)e^{-sT_{d,eq}}, \qquad T_{q,d}(s) \approx \frac{C_q(s)G_q(s)e^{-sT_{d,eq}}}{1+C_q(s)G_q(s)e^{-sT_{d,eq}}}.$$

预设 PI 与 RL 极零点对消后，CqGq=ωc/s，仍可化为：

$$\boxed{T_{q,d}(s) \approx \frac{\omega_c e^{-sT_{d,eq}}}{s+\omega_c e^{-sT_{d,eq}}}}.$$

分母也含延迟，所以它不再是单纯的无延迟一阶有理式。 不可把上式当成下列「无延迟闭环完成后才加输出延迟」的模型；两者的回授特征方程不同：

$$\frac{\omega_c e^{-sT_{d,eq}}}{s+\omega_c e^{-sT_{d,eq}}} \neq \frac{\omega_c}{s+\omega_c}e^{-sT_{d,eq}}.$$

例如 ω=1000 rad/s、Td,eq=150 μs 时，这个延迟因子带来约 −0.15 rad=−8.59° 的额外相位，会减少相位裕度。若只看无延迟的一阶电流闭环，便看不到这项回授稳定性的影响。

与目前 UI 的对照： With current-loop dynamics 保留无延迟连续 Tq(s)；With digital delay 使用第 6 节的离散 PI、一拍延迟与精确 ZOH plant，速度 / 位置环另以状态空间处理多速率。该数位模型已含这些效应，不得再额外乘一次 exp(−1.5sTs)，也不得再加一次半周期，否则会重复计入延迟。本节的 1.5Ts 只是用来理解其低频平均相位效应，并不取代精确数位模型。

参考：imperix：取样、控制更新与 PWM 调变延迟的区分；本版时序以 simulation.py 的 CCR queue 与 ui-2.js 的数位 Bode 实作核对。

5.5 位置回路

先将速度回授闭合，令其闭环为 Tω(s)。外位置 P 为 Cθ=Kp,pos，速度到位置为 1/s：

$$L_\theta(s) = K_{p,pos}\frac{T_\omega(s)}{s}, \qquad T_\theta(s) = \frac{\theta_m}{\theta_{ref}} = \frac{K_{p,pos}T_\omega(s)}{s + K_{p,pos}T_\omega(s)}.$$

若速度闭环可近似为 1，则 Tθ≈Kp,pos/(s+Kp,pos)，预设理想位置频宽约 15/(2π)=2.39 Hz。这只是内环足够快、未限速时的近似。

使用理想电流 / 转矩追踪、但保留 Speed PI 动态时：

$$T_\theta(s) = \frac{K_{p,pos}(K_{p\omega}s + K_{i\omega})}{Js^3 + (B + K_{p\omega})s^2 + (K_{i\omega} + K_{p,pos}K_{p\omega})s + K_{p,pos}K_{i\omega}}.$$

预设为：

$$T_\theta(s) = \frac{0.24s + 4.8}{0.00016s^3 + 0.0160028s^2 + 0.56s + 4.8}.$$

5.6 前馈对「命令追踪」的影响

定义 F(s) 为从合成转矩命令到速度的名义 plant，并令：

$$Q(s) = \sigma_a K_{aff} J s + \sigma_B B, \qquad K_v = \sigma_v K_{vff}.$$

对平滑轨迹，αref=sωref、ωref=sθref，未限幅时：

$$\frac{\omega_m}{\omega_{ref}} = \frac{F(s)[C_\omega(s) + Q(s)]}{1 + F(s)C_\omega(s)}.$$

Position 模式则为：

$$\frac{\theta_m}{\theta_{ref}} = \frac{F(s)\{C_\omega(s)[K_{p,pos} + K_v s] + Q(s)s\}}{s + F(s)C_\omega(s)[s + K_{p,pos}]}.$$

前馈改变命令到输出的分子，回授特征方程不变，因此在这个未饱和线性模型下，Kvff / Kaff 不改变 feedback PM / GM，但可能改变 Command-Tracking Bandwidth。

页面的 Command Tracking 是轨迹输出参考到实际输出的分析，不是「目标数字经非线性轨迹产生器」的整体传递函数。Speed Step 在时间模拟中 αref=0，所以不能把它与含 Js 前馈的平滑参考 Bode 直接当成同一个 step response。

6. 数位控制与 PWM 时序

6.1 与引擎一致的离散 PI

未饱和时，输出与积分更新顺序为：

$$u[k] = K_p e[k] + x[k], \qquad x[k+1] = x[k] + K_i T_s e[k].$$

因此：

$$C(z) = K_p + \frac{K_i T_s}{z-1}.$$

此处不能任意改成 Kp+KiTs·z/(z−1)，两者输出 / 积分时序不同。速度 PI 将 Ts 换为 Tω。

6.2 连续 RL、前端 ZOH 与数位电流回路的完整推导

6.2.1 实际 plant 仍是连续的；ZOH 位在 plant 前端

数位的是 PI 的运算与取样讯号，不是把实际马达变成数位元件。 以名义理想解耦的单一电流轴为例，令轴别 $\ell \in \{d,q\}$，连续电气方程为：

$$L_\ell \frac{di_\ell(t)}{dt} + R_s i_\ell(t) = v_\ell(t), \qquad G_\ell(s) = \frac{I_\ell(s)}{V_\ell(s)} = \frac{1}{L_\ell s + R_s}.$$

L_ℓ 是电感，单位 H；$G_\ell(s)$ 才是连续 RL 受控体的电压到电流传递函数。此名义方程假设 dq 解耦成立，忽略饱和、dead-time、切换谐波与未抵消的耦合 / 反电动势扰动。

输入命令序列 $v_\ell[k]$ 经前端保持器 ZOH 变成连续时间的分段常数电压 $v_\ell(t)$，再作用于连续 RL；输出端 ADC 在 kTs 取样，得到 $i_\ell[k]$。所以应分成：

离散电压序列 → 前端 ZOH → 连续 RL → 输出取样 → 离散电流序列。

后文的 $G_{\ell,\text{hold}}(z)$ 是上述「ZOH + 连续 RL + 输出取样」整组的离散等效，不是说连续马达本体已变成离散 plant，也不是把 ZOH 移到 RL 后面。本版实际时间模拟仍计算 PWM 切换与连续状态的数值积分；Bode 这里则用平均电压保持来建立名义线性模型，不能把实际切换电压误认为每周期完全平坦。

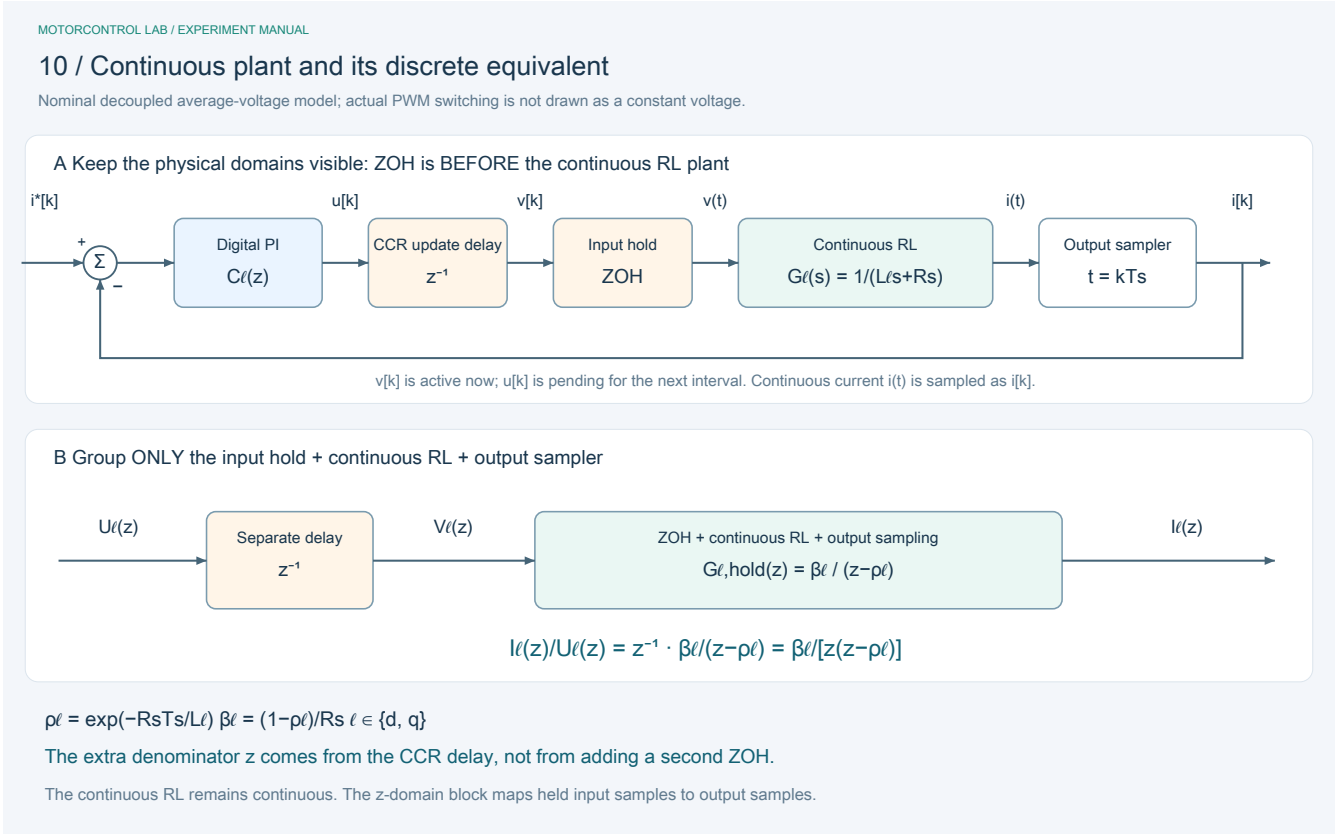

图 10 | 上方保留 ZOH、连续 plant 与取样器的实际位置；下方把这三者合并成离散等效，额外一拍 CCR 更新延迟仍保留在等效方块外。

6.2.2 用积分因子逐步求出 a、b：从微分方程到差分方程

微分方程描述连续时间的变化率；差分方程描述相邻取样时刻的数值关系。 这里不是直接把 di/dt 换成有限差分，而是在每个 ZOH 保持区间把连续微分方程精确解完，最后才取样。

为了直接看清小写 a、b 的来源，本小节暂时省略 d / q 轴下标，令 L 表示该轴电感；最后再对回本章的 ρℓ、βℓ。假设 Rs>0、L>0、Ts>0。

步骤 1 | 写出本周期的连续方程与已知初值。 在第 k 个周期内，ZOH 使电压保持为 v[k]。定义局部时间 τ=t−kTs，并把这段电流写成 ĩ(τ)=i(kTs+τ)，所以：

$$L\frac{d\tilde{i}(\tau)}{d\tau} + R_s\tilde{i}(\tau) = v[k], \qquad \tilde{i}(0) = i[k], \qquad \tilde{i}(T_s) = i[k+1].$$

令 r=Rs/L，单位 s⁻¹。方程两边除以 L：

$$\frac{d\tilde{i}}{d\tau} + r\tilde{i} = \frac{v[k]}{L}, \qquad r = \frac{R_s}{L}.$$

在此区间内，v[k]、Rs、L 都是常数；变动的是连续电流 ĩ(τ)。

积分因子法是什么？为什么要乘这个函数？ 这是解一阶线性微分方程的方法。目的是利用「乘积微分法则」，把原本分开的两项变成一个乘积的导数，接著就能直接积分。先假设要乘上一个未知函数 μ(τ)：

$$\mu(\tau)\frac{d\tilde{i}}{d\tau} + r\mu(\tau)\tilde{i} = \frac{v[k]}{L}\mu(\tau).$$

乘积微分法则则给出：

$$\frac{d}{d\tau}\left[\mu(\tau)\tilde{i}(\tau)\right] = \mu(\tau)\frac{d\tilde{i}}{d\tau} + \frac{d\mu}{d\tau}\tilde{i}(\tau).$$

对照两式，要让左边完全相同，就选择 dμ/dτ=rμ。取最简单的解 μ(τ)=exp(rτ) 即可，因为指数函数的导数正好是 r exp(rτ)。乘上任意非零常数也可以，但最后会消掉，因此取常数为 1。这个因子是由乘积微分法则决定的，不是任意猜一个指数。

步骤 2 | 乘上积分因子 exp(rτ)。 使用乘积微分法则，左边两项恰好可以合成一个完整导数：

$$e^{r\tau}\frac{d\tilde{i}}{d\tau} + re^{r\tau}\tilde{i} = \frac{v[k]}{L}e^{r\tau},$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[e^{r\tau}\tilde{i}(\tau)\right] = \frac{v[k]}{L}e^{r\tau}.$$

这一步就是指数函数出现的原因：RL 自然响应的一阶衰减率是 r=Rs/L，而 exp(rτ) 可以把原方程整理成容易积分的形式。

步骤 3 | 从本周期起点 0 积分到下一个取样点 Ts。 左边积分后只剩端点值；右边利用 v[k] 是常数：

$$\left[e^{r\tau}\tilde{i}(\tau)\right]_0^{T_s} = \frac{v[k]}{L}\int_0^{T_s} e^{r\tau}\,d\tau.$$

左边的定积分怎么算？ 令 F(τ)=exp(rτ)ĩ(τ)。微积分基本定理说明：「导数从 0 到 Ts 的积分，等于原函数在上限的值减去下限的值」。因此逐项写开为：

$$\begin{aligned}\int_0^{T_s}\frac{d}{d\tau}\left[e^{r\tau}\tilde{i}(\tau)\right]d\tau &= \left[e^{r\tau}\tilde{i}(\tau)\right]_0^{T_s}\\ &= e^{rT_s}\tilde{i}(T_s) - e^{r\cdot 0}\tilde{i}(0)\\ &= e^{rT_s}i[k+1] - i[k].\end{aligned}$$

方括号的下标 0、上标 Ts 表示「代入 Ts，再减去代入 0」，不是再乘上 Ts。因为 exp(0)=1，所以第二项只剩 i[k]。局部时间 τ=0 是第 k 周期的起点，不代表电流为零；只有另行指定零初始条件时，i[k] 才可能是零。

请留意容易看错的符号：左边是 exp(rTs)·i[k+1]−i[k]，不是 i[k+1]/(rTs)−i[k]。 系数 1/r 会出现在右边指数函数的反导函数里，两边的计算来源不同。

右边的积分怎么算？ v[k]/L 在本周期固定，可以移到积分号外。因为 d[exp(rτ)/r]/dτ=exp(rτ)，所以：

$$\int_0^{T_s} e^{r\tau}\,d\tau = \left[\frac{e^{r\tau}}{r}\right]_0^{T_s} = \frac{e^{rT_s}-1}{r}.$$

因为 Lr=Rs，并代入端点 ĩ(0)=i[k]、ĩ(Ts)=i[k+1]，得到：

$$e^{rT_s}i[k+1] - i[k] = \frac{v[k]}{Lr}(e^{rT_s}-1) = \frac{v[k]}{R_s}(e^{rT_s}-1).$$

步骤 4 | 两边乘 exp(−rTs)，再整理成「下一点 = 旧电流衰减后的值 + 本期输入作用」。

$$\begin{aligned} i[k+1] &= e^{-rT_s} i[k] + \frac{1-e^{-rT_s}}{R_s} v[k] \\ &= e^{-R_s T_s/L} i[k] + \frac{1-e^{-R_s T_s/L}}{R_s} v[k]. \end{aligned}$$

现在把 i[k] 前面的系数命名为 a，把 v[k] 前面的系数命名为 b，便得到所求的差分方程：

$$\boxed{i[k+1] = a\, i[k] + b\, v[k]}, \qquad \boxed{a = e^{-R_s T_s/L}, \quad b = \frac{1-e^{-R_s T_s/L}}{R_s} = \frac{1-a}{R_s}}.$$

a 不是凭空指定的系数，而是原本电流经过一个 Ts 后剩下的比例；b 是本周期保持电压对下个电流样本的作用系数。 a 是无因次，b 的单位是 A/V，故两项最后都是电流。

也可以用电气时间常数 τe=L/Rs 来读这个结果：

$$\tau_e = \frac{L}{R_s}, \qquad a = e^{-T_s/\tau_e}, \qquad i[k+1] = a\, i[k] + (1-a)\frac{v[k]}{R_s}.$$

其中 v[k]/Rs 是「若本期电压一直保持下去，电流最终会趋近的稳态值」。上式说明：一个周期后的电流，保留 a 倍旧电流，同时往新的稳态值前进 1−a 的比例。正参数下 0<a<1，因此这不是把电流瞬间跳到 v[k]/Rs。

步骤 5 | 对回本章符号与 UI 预设值。 本小节的 a、b，就是第 ℓ 轴的：

$$a = \rho_\ell = e^{-R_s T_s/L_\ell}, \qquad b = \beta_\ell = \frac{1-\rho_\ell}{R_s}, \qquad i_\ell[k+1] = \rho_\ell i_\ell[k] + \beta_\ell v_\ell[k].$$

以 q 轴 Rs=1.2 Ω、Lq=0.0125 H、Ts=100 μs 为例，电气 RL 时间常数 Lq/Rs≈10.4167 ms，a≈0.9904459329，b≈0.0079617226 A/V。注意，这是连续 RL plant 的电气时间常数，不是先前 PI 极零点对消后的闭环时间常数 1 ms，也不是等效延迟 0.15 ms。

本周期条件	下一个样本的结果	系数的意义
v[k]=0，i[k]=1 A	i[k+1]=a·1 A≈0.9904459329 A	a 表示没有外加电压时，电流自然衰减后留下的比例
v[k]=1 V，i[k]=0	i[k+1]=b·1 V≈0.0079617226 A	b 表示一个保持周期内，1 V 电压从零电流产生的电流变化

到此仍未加入额外一拍 CCR 更新延迟。 此处 v[k] 是当期已经生效的保持电压。若改成 PI 新算出的 u[k]，再依第 6.2.4 节代入 v[k]=u[k−1]；不要在求 a、b 的这一步把两种命令混在一起。

6.2.3 对差分方程取 z 转换，得到 β/(z−ρ)

令初始电流为零，并以 Iℓ(z)、Vℓ(z) 表示 iℓ[k]、vℓ[k] 的 z 转换。因为 iℓ[k+1] 的转换是 zIℓ(z)，所以上式变成：

$$zI_\ell(z) = \rho_\ell I_\ell(z) + \beta_\ell V_\ell(z).$$

移项并取输出 / 输入比值：

$$(z-\rho_\ell) I_\ell(z) = \beta_\ell V_\ell(z), \qquad \boxed{G_{\ell,hold}(z) \equiv \frac{I_\ell(z)}{V_\ell(z)} = \frac{\beta_\ell}{z-\rho_\ell}}.$$

到这一步，尚未加入额外的计算 / CCR 更新延迟。 这个模型的输入是当期就已生效的 vℓ[k]；电流从 iℓ[k] 演化到下一次取样 iℓ[k+1]，正是连续 RL 在一个保持区间内的作用。

同一式也可写成：

$$G_{\ell,hold}(z) = \frac{\beta_\ell z^{-1}}{1 - \rho_\ell z^{-1}}.$$

这是相同传递函数的两种代数写法，不是看到这里的 z^{-1} 就再多算一次 CPU 延迟；它来自状态差分式的时间索引与受控体演化。额外的排程延迟要看「当期计算的新命令是否在当期生效」，下一节才加入。

6.2.4 为何总分母又多一个 z？因为新命令下一个周期才生效

现在区分两个不同的电压序列：

符号	意义	本版时序
uℓ[k]	PI 在第 k 次取样后算出的新电压命令	pending，要给下一个周期
vℓ[k]	第 k 个周期实际送进前端 ZOH 的生效电压命令	active，来自上一轮的 uℓ[k−1]

因此，本版「下一个 valley 才套用」的规则就是：

$$v_\ell[k] = u_\ell[k-1], \qquad V_\ell(z) = z^{-1}U_\ell(z).$$

这里才是额外的一拍 CCR 更新延迟。原本的 Gℓ,hold(z) 是从 Vℓ 到 Iℓ；若现在改问「新算出的 Uℓ 到量到的 Iℓ」，便必须乘上 Vℓ/Uℓ=1/z：

$$\boxed{\frac{I_\ell(z)}{U_\ell(z)} = \frac{1}{z}\,\frac{\beta_\ell}{z - \rho_\ell} = \frac{\beta_\ell}{z(z - \rho_\ell)}}.$$

所以原图里「分母额外的 z」不是凭空出现、不是因为电感多了一个状态，也不是再做一次 ZOH；它来自新算的命令要延后一个 Ts 才能进入原本的保持器。把 vℓ[k]=uℓ[k−1] 直接代回状态式，也会得到同样结果：

$$i_\ell[k+1] = \rho_\ell i_\ell[k] + \beta_\ell u_\ell[k-1].$$

用最前面几个样本看差别。 令初始电流与旧命令皆为零，并从 k=0 起施加固定的新电压测试命令 U0=1 V；此例只测电压到电流通道，先不闭合 PI：

取样时刻	新命令当期立即生效，没有额外一拍延迟	新命令下一期才生效，本版时序
k=0，t=0	i[0]=0	i[0]=0
k=1，t=Ts	i[1]=βℓ·U0	i[1]=0，第一个周期仍用旧电压 0
k=2，t=2Ts	i[2]=βℓ(1+ρℓ)U0	i[2]=βℓ·U0

这个「第一个非零电流样本再晚一格」就是两个传递函数之间额外 1/z 的效果。它与 RL 自身需要经过时间才改变电流，是两件应分开辨认的事。

6.2.5 再把离散 PI 接回去，才得到开回路与闭回路

第 6.1 节已定义本版先输出、后更新积分的控制器：

$$C_\ell(z) = K_{p\ell} + \frac{K_{i\ell} T_s}{z-1}.$$

令 $E_\ell(z)=I_\ell^*(z)-I_\ell(z)$，PI 输出 $U_\ell(z)=C_\ell(z)E_\ell(z)$。沿著「PI → 一拍延迟 → ZOH / RL / 输出取样」的负回授回路相乘：

$$\boxed{\mathcal{L}_\ell(z) = C_\ell(z)\,\frac{1}{z}\,G_{\ell,hold}(z) = \left(K_{p\ell} + \frac{K_{i\ell}T_s}{z-1}\right)\frac{\beta_\ell}{z(z-\rho_\ell)}}.$$

这里使用花体 $\mathscr{L}(z)$ 代表开回路，以免和电感 L_ℓ 混淆。单位负回授闭合后：

$$T_\ell(z) \equiv \frac{I_\ell(z)}{I_\ell^*(z)} = \frac{\mathcal{L}_\ell(z)}{1+\mathcal{L}_\ell(z)}.$$

在 Bode 分析时，以 $z=\exp(j\omega T_s)$、$\omega=2\pi f$ 评估频率响应。此离散等效描述的是取样时刻的电流响应；没有声称整个取样区间内的连续电流变成一阶阶的常数。

ZOH 与额外一拍已经各算一次。 不应再在 $\mathscr{L}(z)$ 上重复加入半个 PWM 周期或 $\exp(-1.5sT_s)$。第 5.4.2 节的 $1.5T_s$ 是另一种连续低频平均近似，不能再叠加到这个精确取样模型上。

6.2.6 旧版符号对照与预设 q 轴数值

旧版的「a 轴」原意是泛指 $a\in\{d,q\}$，不是三相 abc 的 a 相；旧版又同时用 La 表示电感与开回路，容易混淆。本节改用以下清楚分开的记号：

旧版符号	本节记号	真正意义
La，没有 (z)	L_ℓ	d 或 q 轴电感，单位 H
aa	ρ_ℓ	$e^{(-RsTs/L_\ell)}$，状态衰减系数
ba	β_ℓ	$(1-\rho_\ell)/Rs$，保持电压的离散输入系数
La(z)	$\mathscr{L}(z)$	整个电流负回授回路的开回路传递函数，不是电感
Ga,ZOH(z)	$G_{\ell,hold}(z)$	前端 ZOH + 连续 RL + 输出取样的等效，尚未包含额外一拍更新延迟

以预设 q 轴 $R_s=1.2\ \Omega$、$L_q=0.0125$ H、$T_s=100\ \mu$s 为例：

$$\rho_q = e^{-0.0096} \approx 0.9904459329, \qquad \beta_q = \frac{1-\rho_q}{1.2} \approx 0.0079617226\ \mathrm{A/V}.$$

因此，从已生效电压 Vq 到取样电流 Iq 是 βq/(z−ρq)；从当期新算出的电压 Uq 到 Iq 才是 βq/[z(z−ρq)]。切换 d 轴时，只需改用 Ld、Kpd、Kid，推导方式相同。

6.2.7 「网页上的电流回路 Bode 图」到底是什么

旧文简写的「页面电流 Bode」不是一个特殊物理量，这个用语确实不够清楚。它的完整意思是：MotorControl Lab 网页的 Loop Bode Analysis 区域，针对 d 轴与 q 轴电流控制回路显示的幅频 / 相频曲线。 Bode 是频率响应图，不是某一种「页面电流」。

图表中的 D-axis current loop、Q-axis current loop，各自用本节的 $\mathscr{A}(z)$ 计算开回路，并用 $T\ell(z)=\mathscr{A}/(1+\mathscr{A})$ 计算闭回路。这些曲线是名义模型的分析结果，不是直接从电流时间波形做 FFT 得到；也不是三相 a 相电流本身。

它们一直使用本节的含延迟离散模型，不会因 Speed model 选 Ideal Inner Current Loop 就变成 Tq=1；Speed model 只切换速度 / 位置 Bode 所采的内环模型。这些名义分析仍忽略切换 ripple、dead-time、限幅与 AW 的非线性。

推导概念可对照 MathWorks：ZOH 的连续 / 离散等效 与 Unit Delay：一拍对应 z^{-1}。

6.3 Valley k 的事件顺序

1. 套用上一个 valley 计算的 pending CCR，成为 active CCR[k]。
2. 同步锁存相电流与 Encoder angle，产生 ADC[k]。
3. 需要时更新位置 / 速度控制器。
4. 执行 Clarke、Park、current PI、解耦、向量限幅、Inverse Park、SVPWM。
5. 计算 pending CCR[k+1]；到下一个 valley 才启用。
6. 本周期 plant 由 active CCR[k] 对应的 switching voltage 驱动。

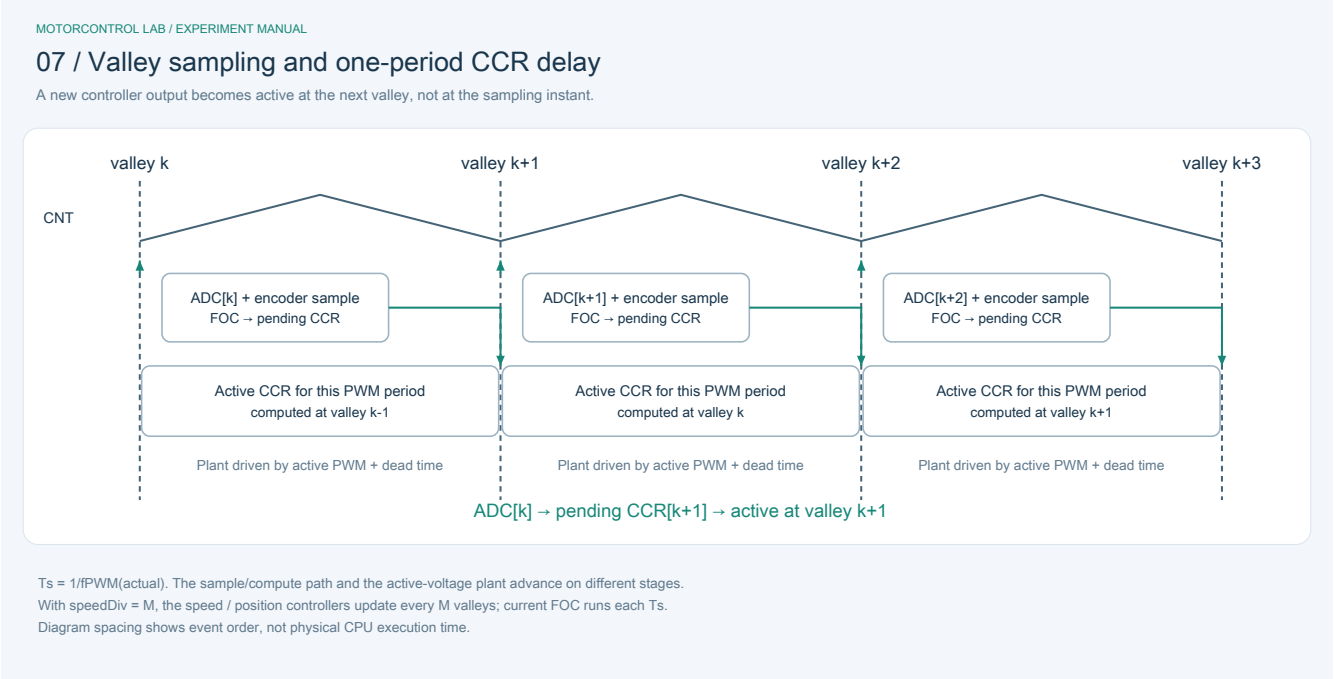

图 07 | Valley 取样、pending CCR 与下一周期套用时序。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示讯号方向。

预设 M=1，速度与电流 PI 都以 10 kHz 更新；增加 speedDiv 仅降低外环更新频率。数位速度模型没有再加一个额外外环运算延迟；其转矩输出于外环更新后送进当次 current FOC，而 current FOC 仍有既定一周期延迟。

7. 波形与诊断读法

7.1 控制响应 / Overview

波形	讯号与单位	读法
Speed response	Speed ref、Speed actual；rpm	ref 是限幅后 ωcmd 换算为 rpm，不一定等于原始速度目标；Current Mode 隐藏此图
dq current control	Id、Iq、Id、Iq；A	实际 dq 状态与有效命令；iq* 已经 q 电流限制
Three-phase currents	Ia、Ib、Ic；A	实际瞬时相电流；堵转时不一定是随时间旋转的三相正弦
Electromagnetic torque / load	Te raw、Te limited、Te actual、TL；N·m	命令、转矩限制与实际转矩；Current Mode 的速度环转矩命令为旁路值，不应当作实际转矩目标
Position servo	θm*、θm；rad	θm* 是轨迹 θref，不是瞬间跳到最终 target；仅 Position
Trajectory speed / command	ωref、ωm、ωcmd；rad/s	区分规划速度、实际速度、含位置修正与限速的命令
Trajectory acceleration	αref；rad/s²	前馈使用的规划加速度；不是实际 dωm/dt
Torque command contributions	Te feedback、Jα FF、Bω FF、Total raw、Limited；N·m	前馈曲线已包含其开关与增益
Position following error	θref−θm；rad	相对移动中的轨迹误差，而不是 final target−θm

电流控制模式即使 iq 为常数，Te 仍可能受 id、Ld−Lq 及 ripple 影响。不要用「速度没变」推论堵转时没有电磁转矩。

7.2 Sensored feedback chain

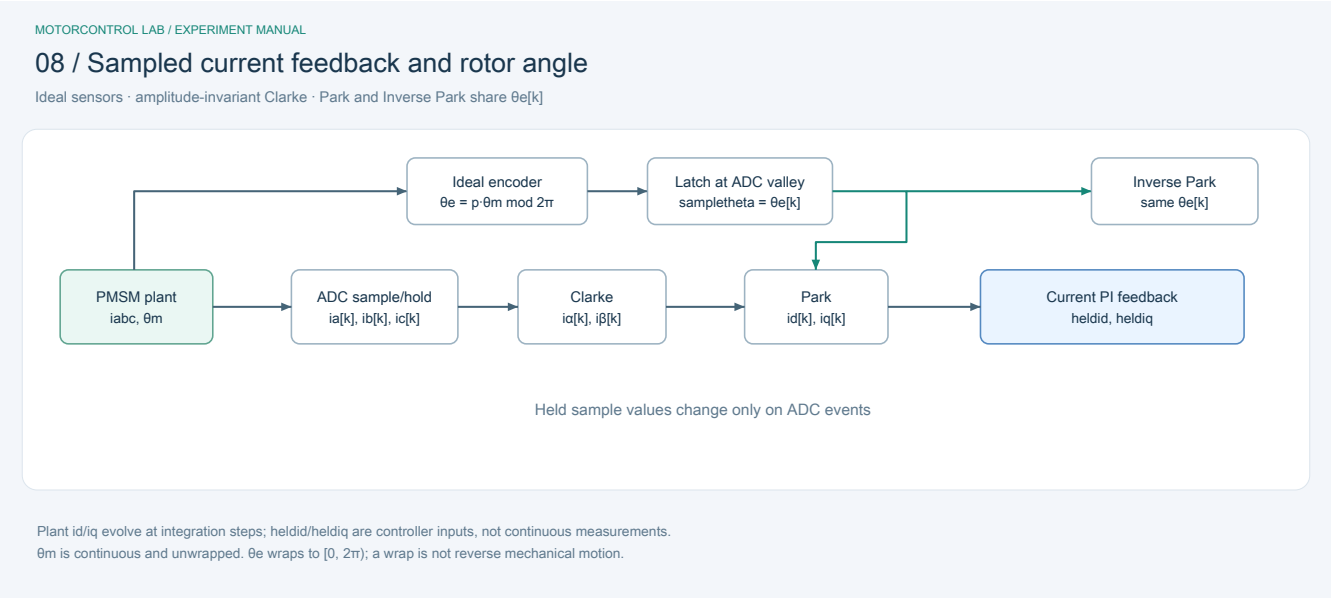

图 08 | ADC、Clarke、Park 与同步锁存电角度的回授链。蓝色为控制器、橙色为限幅或 AW、绿色箭头为前馈；实线箭头表示讯号方向。

波形	说明
ADC sampled phase currents	sampleia / b / c：ADC 事件锁存，直到下次取样保持不变
Clarke / stationary current frame	ialpha、ibeta：由 sampled 相电流转换的保持值
Park feedback vs plant dq state	heldid / heldiq 是控制器看到的回授；id / iq 是连续 plant 状态
Encoder / mechanical and electrical angle	θm 连续角；θe wrap 至 [0,2π)；sampletheta 为取样电角
Inverse Park voltage commands	Vα、Vβ：向量限幅后、送往 SVPWM 的命令，不是实际相电压
ADC hold detail	最后 8 个 PWM 周期的 sampled / plant 对照，适合观察取样保持

θe 的锯齿跳回是角度 wrap，不是转子倒转。θm 不 wrap，应用于判断多圈位置。

7.3 Controller Output / Anti-Windup

每一控制事件的诊断值在下次更新前保持；总览仍可能降采样。点选图例可隐藏不需要的曲线。

d / q 轴 PI / vector saturation：

图例	d / q CSV 栏位	意义	单位
P term	dp / qp	Kp·e	V
I state (used)	di / qi	本次形成输出时使用的 x[k]	V
PI raw	dpi / qpi	P+I，未加入解耦	V
Decoupling voltage	dff / qff	电角速度交叉项补偿与 back-EMF 补偿	V
Pre-vector voltage	draw / qraw	PI raw + decoupling	V
Post-vector voltage	dsat / qsat	共享向量限幅后命令	V
AW correction	daw / qaw	启用时 Kaw·(post−pre)，否则 0	V/s

请成对看 dsat、qsat 的向量长度，不能仅因某一轴低于 Vmax 就认为没有饱和。AW correction 是积分变化率的修正项，不是电压，也不是完整积分变化率；完整变化率为 Ki·e+AW。

Post-vector voltage 还没经过一周期 CCR 延迟、量化、switching 与 dead-time，不能称为已施加的瞬时 plant dq 电压。CSV 的 vd / vq 才是由实际 switching phase voltage 转换的 dq 电压；它们与 dsat / qsat 不会逐点相等。

Speed PI / torque limits：

图例	CSV 栏位	意义
P term	speedP	Kpω·eω，N·m
I state (used)	speedI	形成本次 PI 输出的积分状态，N·m
PI raw	tefb	P+I，N·m
Total raw	teraw	PI + acceleration FF + friction FF，N·m
Torque-limited	teref	转矩命令限制后，N·m
After current limit	speedEffective	Kt·iq*，N·m；有效命令等效转矩，并非实际 Te
AW correction	speedAW	Kawω·(speedEffective−teraw)，N·m/s

CSV 的 speedIntegral 是更新后的 xω[n+1]，而 speedI 是本次输出使用的 xω[n]。要检查 P+I=PI raw，使用 speedI。

Position P / speed limit：

• Position P raw / omegafb：Kp,pos·(θref−θm)，rad/s。

• With velocity FF / positionRawSpeed：位置 P 加上速度前馈后的合成值，即 ωfb+Kvff·ωref，rad/s；此处不包含加速度前馈，后者加在转矩支路。

• Speed-limited / speedcmd：限速后 ωcmd，rad/s。

位置环只有上述 P 与限制；图中没有位置 I 或位置 AW。

7.4 Switching / Dead time

波形	用途
Center-aligned CNT / CCR	CNT 与 active CCR A / B / C，单位 counts；观察比较交点
PWM switching / ADC / apply event	Sa / Sb / Sc 逻辑、ADC 事件、CCR apply 事件；apply 表示载入 pending，即使数值恰巧相同也可为 1
Phase-to-neutral voltage	Van / Vbn / Vcn，V；已扣 floating neutral，并含启用的 dead-time 扰动
Dead-time voltage error	ΔVan / ΔVbn / ΔVcn 是中性点重建后误差；ΔVaO 是 A 相 pole 误差
Switching current detail	相电流的末段 ripple；用于观察切换与 dead-time 影响
Sample & hold / current state	末段 id / iq 与 heldid / heldiq 的差异

高速图只保留模拟最后 8 个 PWM 周期，横轴是该视窗起点之后的 μs；总览横轴是模拟起点之后的 ms。游标回到早期时刻，不代表高速图也自动移到该时刻。

7.5 指标与资料解析度

• Final rpm / iq：最后积分状态，不是末段平均，也不保证已到 steady state。

• Peak current：模拟积分节点上的最大相电流绝对值。

• Saturation %：向量电压限幅发生的电流控制更新次数比例，不是 torque limit 比例。

• Cost：计算耗时，不是模拟 Duration。

• 总览约最多 6000 点，可能漏掉 switching edge 或短暂事件；高速图保留末段完整 plant 节点，但 switching edge 仍受 plant 步长解析度限制。

8. Bode 与 FFT 频谱分析

1. 选择「目前设定」或「上次模拟快照」。要解释既有波形时，优先选快照。

2. Current Mode 仅显示 d / q 电流回路；Speed Mode 额外显示速度回路；Position Mode 再加位置回路。

3. Speed model 选 Ideal、With current-loop dynamics 或 With digital delay（完整比较表与影响范围见第 5.4 节开头）。此选项只改变分析模型，不切换时间模拟引擎；电流 Bode 始终使用第 6 节数位模型。

4. 更新 Bode，查看交越频率、PM、GM 与两种 bandwidth。

曲线 / 栏位	定义
Open loop L	沿该负回授回路的开环传递函数
Feedback Closed-Loop	L/(1+L)，不含参考前馈
Command Tracking	包含已启用参考前馈的 reference→output；只画幅频曲线
Gain crossover / PM	开环 0 dB 交越与 180°+开环相位
Phase crossover / GM	开环 −180°（及后续相位分支）交越与所需增益裕度
Nyquist	该回路取样率一半；不是建议控制频宽
Feedback BW	回授闭环相对自身平坦低频增益下降 3.0103 dB 的首次向下交越
Command-Tracking BW	命令追踪曲线依相同方式定义的频宽

N/A 可能因没有可靠交越、低频不平坦、扫描结果无效，或没有正 PM 的 gain crossover，不能直接解读为「不稳定」，也不能解读为「无限频宽」。程式用频率扫描估计裕度，并非完整稳定性证明。

Bode 不含限流、限压、AW、dead-time、switching ripple 与完整 dq 非线性耦合。即使关闭 decoupling，页面仍显示理想解耦参考模型。实际已饱和时，不宜用小讯号 bandwidth 预测大步阶收敛时间。

8.1 FFT：从时域波形观察频谱

FFT / 频谱分析位于 Waveform instruments 与 Loop Bode Analysis 之间。它分析「上次已完成模拟」所记录的时域讯号，不是 Bode 名义模型，也不是对 Bode 曲线再做 FFT。电流、电压、转矩、速度、位置、轨迹、控制器 / AW 诊断与 PWM / 计时器栏位皆可选择，另提供由 rpm 换算的机械角速度 omega_m（rad/s）。

8.1.1 操作步骤与目前预设值

1. 执行一次模拟，再移至 FFT / 频谱分析。

2. Data Source 预设为 Overview (decimated)，亦即「全程总览（降采样）」。先选择要分析的讯号，例如 Ia [ia]、Vd actual [vd] 或 I state [qi]；中括号是实际资料栏位名称，旁边标示单位。

3. 设定 FFT start / FFT end，单位为 ms。切换资料来源或取得新的模拟结果时，时间范围会重设为该来源可用的完整范围。

4. 选择窗函数；预设 Hann，亦可选 Blackman 或 Rectangular。预设勾选 Remove mean (DC)，在加窗前先扣除所选样本的平均值。

5. 按 Analyze FFT / 计算 FFT，检查频谱、Fs、Nyquist、Δf、实际样本范围与样本数；可用图表的缩放功能检视局部频段。

6. Spectrum scale 可切换峰值幅度、Amplitude (dB re 1 unit) 或 PSD。此切换沿用同一次计算；修改讯号、来源、时间范围、窗函数或移除平均值设定后，需重新计算。

7. 按 Export FFT CSV 汇出所有频点与分析 metadata。若只是修改马达 / 控制器参数而没有重跑，FFT 仍分析旧的模拟快照，不会把新参数冒充成新的量测结果。

设定	目前预设	意义
Data Source	Overview (decimated)	预设先观察较长时间纪录；仍有降采样混叠限制
Signal	Ia [ia] · A	A 相电流；其他栏位可由下拉选单选择
Start / End	来源的可用完整范围	以 ms 输入；不是模拟器的命令 Start / Duration
Window	Hann	降低截断边界造成的频谱泄漏，但会展宽主瓣
Remove mean (DC)	启用	扣除所选片段的平均值；不等于移除所有低频变化
Spectrum scale	Peak amplitude	讯号原单位的单边峰值幅度，不是 RMS

8.1.2 Overview 与 High-speed 的取样限制

资料来源	实际纪录	适合观察与限制
Overview (decimated)，预设	涵盖整次模拟的降采样资料，约最多 6000 个规则取样点，另可能有末端点	时间较长，可先观察电流、电压或控制响应的低频成分与启动暂态。没有抗混叠滤波，高频切换成分可能折入低频；不可当成精确、经低通滤波的量测。
High-speed (last 8 PWM periods)	模拟最后 8 个 PWM 周期的完整 plant 积分节点	适合检查切换相关频率成分；纪录太短时，无法解析马达的低频电气基波。若模拟本身短于 8 周期，则仅有实际存在的资料。

FFT 的 Fs 是「所选来源的实际资料取样率」，不是直接把 PWM 频率或 timer clock 当成 Fs。令相邻样本间距为 Δt，选入的样本数为 N：

$$F_s = \frac{1}{\Delta t}, \qquad T_{record} = N\Delta t, \qquad \Delta f = \frac{F_s}{N} = \frac{1}{T_{record}}, \qquad f_{Nyquist} = \frac{F_s}{2}.$$

Δf 是频点间距；窗函数主瓣宽度也会影响两个相近频率能否分开，不能只看 Δf。第一个至最后一个样本相隔 (N−1)Δt，而上述频率网格使用的纪录长度为 NΔt；UI 会分别显示实际起讫时间与 NΔt。

本版不补零，也不为凑成 2 的次方而裁掉整段资料；每次需有 8 ~ 262144 个样本。总览为保留模拟末端，可能额外存入不在规则网格上的最后一点；FFT 会省略这个较短末端间隔的样本，并显示「省略的不等间距末端样本」数目。其他不等间距情况会拒绝分析，不会默默插值或混接 slow / fast 资料。

选 Overview 改善的是可用纪录长度，不代表增加原始取样率，也不代表已消除混叠。 分析稳态基波时，应先确认讯号已接近稳态，并选择含多个电气周期的时间范围。整次启动、负载加入及转速变化混在一起的 FFT，描述的是该段非稳态纪录，不是某个末端工作点的单一基频。缩短区间会降低频率解析度；这是取舍，不是多按一次计算就能改善。

8.1.3 窗函数、幅值、dB 与 PSD

令 x[n] 为所选讯号，w[n] 为窗函数。勾选移除平均值时，以 x[n]−平均值取代 x[n] 后，再计算下式；未勾选则直接使用原讯号：

$$X_w[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w[n]e^{-j2\pi kn/N}, \qquad f_k = \frac{kF_s}{N}, \quad 0 \le k \le \lfloor N/2 \rfloor.$$

窗函数	本版使用的周期窗	读法
Hann，预设	0.5−0.5 cos(2πn/N)	一般频谱观察的起点；降低边界泄漏，主瓣比矩形窗宽
Blackman	0.42−0.5 cos(2πn/N)+0.08 cos(4πn/N)	较低旁瓣，代价是更宽主瓣
Rectangular	w[n]=1	不加权截断；相干取样可准确读幅值，非整周期截断时泄漏较明显

单边峰值幅度使用窗函数 coherent gain 修正。定义倍率 c_k 后，幅值与 PSD 为：

$$c_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \text{ or } (N \text{ even and } k = N/2), \\ 2, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad A[k] = \frac{c_k|X_w[k]|}{\sum_n w[n]}, \qquad CG = \frac{1}{N}\sum_n w[n].$$

$$PSD[k] = \frac{c_k|X_w[k]|^2}{F_s \sum_n w[n]^2}.$$

显示方式	单位与定义	注意事项
Peak amplitude	与原讯号相同，例如 A、V、N·m、rpm	为相干正弦的峰值幅度标定，不是 RMS；DC 与偶数 N 的 Nyquist 频点不加倍。离频点的正弦仍会泄漏，峰值可能偏低。
Amplitude (dB re 1 unit)	相对 1 个原讯号单位的幅值比	电流以 1 A 为基准、电压以 1 V 为基准；不是 dBFS。dB 显示与 CSV 的 dB 栏位下限为 −240 dB，线性幅值与 PSD 仍保留原值。
PSD	原单位平方 / Hz，例如 A²/Hz、V²/Hz	功率谱密度；频点高度不能直接当成某条正弦的峰值幅度。

$$A_{dB}[k] = 20\log_{10}\left(\frac{A[k]}{1 \text{ signal unit}}\right).$$

Mean、RMS 与 AC RMS 皆由所选的未加窗原始片段计算；AC RMS 先扣除平均值。它们不是 FFT 图中最高频点的数值。「最强非 DC 频点」只找零频以外最大的频点，不是基频辨识器；当资料太短、非稳态或有混叠

时，尤其不能把这个数字直接当作马达电气频率。

8.1.4 预设速度模式的 IA 范例：为何出现 1.25 kHz、0.2897 A

保持预设速度模式，选 Ia [ia]、High-speed、Hann、移除平均值及 Peak amplitude。使用本版预设模型重算，最强非 DC 频点约为 1.25 kHz、0.289727 A。这是电流幅值，单位是 A，不是「最高电压」。

项目	本版预设案例
PWM 频率	10 kHz
高速取样间距 / 取样率	1.25 µs / 800 kHz
高速样本数	640，最后 8 个 PWM 周期
有效纪录长度 / 频点间距	0.8 ms / 1.25 kHz
末端实际转速 / 极对数	约 1008.215 rpm / 2；1500 rpm 是命令目标，不是此时实际转速
末段电气频率估计	约 33.607 Hz，依实际转速换算

$$T_{record} = \frac{8}{10000} = 0.0008\ \text{s}, \qquad \Delta f = \frac{1}{0.0008} = 1250\ \text{Hz}, \qquad f_e = \frac{p\, n_{rpm}}{60} \approx 33.607\ \text{Hz}.$$

这个视窗只涵盖约 0.027 个电气周期，连一个周期都没有。FFT 频点从 0、1250、2500 Hz 开始，无法辨认约 33.6 Hz 的基波；去平均与加窗后，短片段的缓慢变化可能在第一个非 DC 频点最大。0.2897 A 是该短片段的频谱幅值，不是 IA 完整周期的电流峰值，也不证明主要振荡是 1.25 kHz。

改选预设 Overview 的完整范围时，此案例约有 5883 个有效规则样本、Fs≈23.529 kHz、Δf≈4 Hz，较能显示低频分布；仍须留意降采样混叠与启动 / 负载暂态。若要定量确认稳态基波与谐波，应使用含多个周期且取样 / 抗混叠条件足够的纪录；目前高速来源只保存最后 8 个 PWM 周期，不能借由补零或更换窗函数把缺少的长时间纪录补回来。

8.1.5 FFT CSV 与检查顺序

汇出档名为 motor-lab-fft-讯号栏位-资料来源.csv。注解 metadata 包含栏位、单位、slow / fast、N、Fs、Δf、实际时间范围、窗函数、去平均设定、统计量与本次模拟的参数快照。资料栏为 frequency_Hz、peak_amplitude、amplitude_dB_re_1_unit、PSD_unit_squared_per_Hz；即使画面只显示其中一种尺度，CSV 仍包含全部三种尺度。

阅读频谱时，依序确认：讯号与单位 → 资料来源 → 实际时间范围 → Fs / Nyquist → Δf / 窗函数 → 是否去平均 → 稳态与否 / 混叠风险 → 峰值的物理解读。FFT 本身不改变控制器、时间模拟或 Bode 模型。

参考：NumPy FFT 定义与正规化、SciPy periodogram 的单边与 PSD 尺度。

9. 六个实验

每个实验请记录完整参数、执行后快照及 CSV；比较时一次只改一个条件。以下设定均是在目前预设值上覆写。

实验一：堵转 dq 电流阶跃

目的： 排除机械加速与 back-EMF，建立电流环基准。

设定： Current、Locked Rotor、id=0、iq=5 A、TL=0、Start=0.02 s、Duration=0.25 s，其余预设。

步骤： 执行；观察 dq current、q 轴 PI / vector diagnostics、Encoder angle。记录末段 iq 平均与 ripple，而非仅看 Final iq。

预期： iq 上升后保持在约 5 A，id 约 0；ωm、θm 全程为零。稳态 q 电压约 Rs·iq=6 V，实际命令还会补偿 dead-time、量化及 ripple。起点的大误差可能造成短暂电压饱和，并不代表稳态追踪失败。

思考： 为何速度为零仍有 Te？为何 iq 为 DC、相电流不一定是时间上的三相正弦？

实验二：自由运转、back-EMF 与失去电流追踪

目的： 分辨 PI steady-state error 与电压能力不足。

设定： 沿用实验一，只改 Free Running。

预期与观察： iq 先追上 5 A，转矩使转子加速；ωeψf 上升，q 解耦电压增加；Pre-vector 与 Post-vector 逐渐分离，iq 可能下降。电流不再追踪不必然是 PI 设计错误。

估计 id≈0、iq 近稳态时：

$$v_d \approx -\omega_e L_q i_q, \qquad v_q \approx R_s i_q + \omega_e \psi_f .$$

判断电压需求应用 sqrt(vd²+vq²)≤Vmax，不能只看 vq≤Vmax。当 iq 已掉落且电气状态仍变动时，以上仅供趋势估计。

既有模型回归参考： 40 steps/PWM、0.25 s 的同设定测试，堵转 Final iq 约 5.002 A；自由运转约 2973 rpm、Final iq 约 1.177 A。这些是先前模型测试值，不是本手册保证的精确标准；目前预设为 80 steps/PWM，读值可有差异。

实验三：电流向量饱和与 AW on / off

目的： 直接看积分累积与回算修正。

设定： Current、Locked Rotor、Vdc=12 V、iq=30 A、Iq limit=40 A、id=0、TL=0、Start=0.02 s、Duration=0.10 s。

步骤： AW on 执行并汇出；AW off 再执行汇出。比较 q I state、PI raw、Pre / Post-vector 以及 AW correction。

预期： 持续受限时两次都追不到 30 A；AW on 的积分状态通常受抑制，AW off 修正恒为零且积分持续累积。较大 I state 不代表较佳控制。

量化检查： qpi=qp+qi；qraw=qpi+qff；AW on 时 qaw=Kaw·(qsat−qraw)。若要比较解除饱和后的恢复，本页没有任意分段电流命令编辑器，不能用此持续高命令实验宣称已测得解除后 recovery time。

实验四：速度 PI 与两级命令限幅

目的： 理解 Speed PI 的转矩单位，以及 AW 追踪对象。

设定： Speed、1500 rpm、Step、Start=0.02 s、Duration=0.5 s、TL=0；Torque limit=0.10 N·m、Iq limit=12 A。其余预设。

步骤： 比较 AW on / off 的 speedI、teraw、teref、speedEffective、speedAW。再保持 AW on，将 Torque limit 改回 1.8 N·m、Iq limit 改成 1 A，重跑。

预期： 第一组主要碰转矩限幅；第二组有效命令转矩上限约 Kt·1 A=0.09 N·m，teref 可能还没到限制，但 speedEffective 已受限。检查 speedAW 是否以有效转矩差回算。

延伸： 恢复命令限幅，加入 0.15 N·m、0.15 s 负载，观察速度下降、电流增加与 PI 积分补偿。若电压饱和，应同时看内环诊断，不能只用速度 PI 曲线解释。

实验五：位置轨迹、速度 / 加速度前馈

目的： 区分轨迹规划、位置回授与前馈。

设定： Control Mode 选 Position Control。Target Position=1 rad、Max Velocity (position)=10 rad/s、Max Acceleration=100 rad/s²、Start=0.02 s、Duration=0.5 s、TL=0；前馈开启时 Kvff=1、Kaff=1，Friction FF 保持关闭。

位置分段方程式、系数与 UI 参数对照详见第 4.5.1–4.5.4 节。

Step / Ramp 到底选哪一个？ 此实验的 Speed profile 不适用，保留预设 Step 即可。这个选项只在 Speed Control 模式决定速度命令是 Step 或 Ramp；Position 模式不读取它。即使目前 UI 仍显示此选项，改选 Ramp 也不会改变本实验的位置轨迹。保留 Step 不代表位置参考直接跳成 1 rad：Position 的目标会先经轨迹产生器，依位移、最大速度与加速度自动产生三角形或梯形速度轨迹。

轨迹时间符号： ta 是加速时间（对称减速也使用 ta）；tc 是等速时间；Tmove=2ta+tc 是参考轨迹从开始到结束的运动时间，与整次模拟 Duration 不同。本设定 ta=0.1 s、tc=0、Tmove=0.2 s，为三角形速度轨迹：0.02 s 开始、0.12 s 到达速度峰值、0.22 s 参考轨迹结束；实际马达是否已到位、稳定，仍须看波形。

在 UI 哪里看？ 选 Position Control，再点 Trajectory Generator，设定最大速度与最大加速度。参数面板下方可看见轨迹类型及 duration=0.200000 s（即 Tmove）；目前没有分别显示 ta、tc 的计算数值。时间波形选 Control response，观察位置参考 θref、速度参考 ωref 与加速度参考 αref。

步骤： 先关闭 Velocity FF 与 Acceleration FF 执行；再只开 Velocity FF；最后两者都开。其余参数相同。比较 position following error、ωref / ωcmd / ωm、torque contributions。

预期： 合理前馈可降低运动中的追踪误差；效果受模型、限制与离散时序影响，不能保证任意增益均改善。位置 P raw 与 With velocity FF 的差值应为启用的 Kvff·ωref。

限速延伸： 将 Position speed limit 降至 3 rad/s，观察合成速度被限制后轨迹误差增大；规划 ωref 本身不因这个下游限制自动重规划。

实验六：取样延迟、dead-time 与 Bode

目的： 连结数位模型与时域波形。

设定： 先回到实验一；保留 10 kHz，观察末段高速图与时序游标。

步骤：

1. 对照 ADC valley、pending CCR、下一个 valley 的 active CCR，确认一周期延迟。

2. dead-time 开 / 关各跑一次，比较 ΔV、q I state、相电流 ripple；堵转 θe=0 时，不要预期一定出现旋转时典型的正弦过零失真。

3. Current Bode 记录 bandwidth 与 PM；调低 PWM 频率后重跑并更新 Bode，检查 Ts 与 delay 的影响。

4. Speed Mode 比较三种 Bode 模型，记录其 PM / bandwidth 差异；时间模拟引擎保持同一套实际模型。

思考： 为何同一组 PI，在连续理想模型与含 z^{-1} 延迟模型的裕度不同？提高 ARR 为何不能取代缩小 plant 积分步长？

10. 资料汇出、常见问题与实验纪录

10.1 CSV 使用方式

汇出档案为 motor-lab-results.csv。开头 # 行包含 JSON 参数与 metadata，之后为栏名；第一栏 dataset 区分 slow / fast。汇入分析工具前，跳过注解行并依 dataset 分组，不要把两组直接串接为单调时间序列，因为末段视窗会与 slow 时段重叠。

t 单位为秒；图上的 ms / μs 是显示换算。rpm / ref 是 rpm；speedcmd、velocityref、omegafb 是 rad/s。theta_m / positionref 为 rad。sat 是该次保持的电压向量限幅旗标。metadata 的饱和比例用完整控制更新计数，不能直接由降采样 slow 的 sat 平均保证重现。

da/db/dc、ccra/b/c 是 active duty / CCR，不是当次刚计算的 pending 值。pending / active 全控制周期资料保留于页面结果的 timing 结构，CSV 未独立汇出 timing 阵列。

10.2 常见问题

现象	先检查
iq 先到命令、后来下降	是否 Free Running？速度、qff 与向量电压是否增加？
堵转时 iq 仍追不到	Vdc、Rs·iq 需求、调变限制、PI、q 命令限制及数值解析度
Speed AW 为零但电流追不到	外环是否未碰命令限幅、但内环已电压饱和？Speed AW 不直接追踪实际 iq
I term 与 PI raw 加总对不上	使用输出前的 di / qi / speedI；speedIntegral 是更新后状态
Position 0.25 s 还没稳定	轨迹何时完成？Duration 是否足够？有无速度 / 转矩 / 电压限制？
改参数后波形没变	是否已重新执行？Bode 是 live 还是 result snapshot？
θe 突然跳回零	正常 wrap；改看连续 θm 判断实际位置
Bode 好看但大步阶不好	小讯号模型忽略饱和、AW、switching 与非线性；检查实际限制
出现数值发散提示	检查增益、步长、极端参数，避免直接把数值失败当成物理结论
引擎 / 图表没有载入	检查网路、CDN、Web Worker 与浏览器错误讯息；首次载入不是完全离线

10.3 实验报告范本

项目	填写
实验名称 / 日期 / 页面版本	
Control Mode / Mechanical Condition	
目标、Start、Duration、轨迹条件	
Rs、Ld、Lq、ψf、p、J、B	
Vdc、m、dead-time、PWM actual、ARR、Ts、Tω、plant 步长	
各环 Kp、Ki、Kaw、AW / decoupling / FF 开关	
电流 / 转矩 / 速度限制与负载	
观察波形、CSV 档名、分析快照	
末段平均误差、ripple、饱和比例	
Feedback BW / Command BW / PM / GM 与模型选择	
观察到的因果关系、模型假设与限制	

本软体未模拟磁饱和、温升、完整损耗、硬体保护与非理想位置感测。参数实验用于理解控制与数值模型，不能把其电流命令限幅误认为完整硬体保护模型。

11. 附录：数位速度 / 位置模型

本节供需要对照页面 bodeModel 的读者使用。目标是精确说明名义数位分析，不是另建一套 switching 模型。

11.1 电流与机械联合离散模型

理想解耦、固定 id0 下，令连续 plant 状态 y=[iq,ωm]□：

$$\dot{y} = A_c y + B_c v_q, \quad A_c = \begin{bmatrix} -R_s/L_q & 0 \\ K_\tau/J & -B/J \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1/L_q \\ 0 \end{bmatrix}.$$

精确 ZOH 离散化：

$$\Phi = e^{A_c T_s}, \qquad \Gamma = \int_0^{T_s} e^{A_c \tau} B_c \, d\tau.$$

包含 PI 积分与 active 电压的状态 x=[iq,ωm,ξq,vactive]□，输入 r 为 N·m 转矩命令：

$$x[k+1] = Ax[k] + B_r r[k],$$

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & 0 & \Gamma_1 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & 0 & \Gamma_2 \\ -K_{iq}T_s & 0 & 1 & 0 \\ -K_{pq} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{iq}T_s/K_t \\ K_{pq}/K_t \end{bmatrix}.$$

最后一列代表新电压到下一周期才成为 active，已内含 current computation delay。若外环每 M 次电流更新才运算一次，转矩命令在这 M 次之间保持：

$$A_M = A^M, \qquad B_M = \sum_{k=0}^{M-1} A^k B_r, \qquad F_\omega(z_\omega) = c_\omega (z_\omega I - A_M)^{-1} B_M,$$

其中 cω=[0,1,0,0]、zω=exp(j2πfTω)。

$$C_\omega(z_\omega) = K_{p\omega} + \frac{K_{i\omega} T_\omega}{z_\omega - 1}, \quad L_\omega(z_\omega) = C_\omega(z_\omega) F_\omega(z_\omega).$$

11.2 位置状态与速度闭环

加入 θm 后，连续 plant 状态采 [iq,ωm,θm]，并加入 θm=ωm，以相同 matrix exponential 求得精确一个 Ts 的位置积分。将其与 current PI 积分、active 电压组成五状态 xp=[iq,ωm,ξq,vactive,θm]□，再 lift 至外环周期，记为：

$$x_p[n+1] = F_p x_p[n] + G_p T^*[n].$$

令 cω=[0,1,0,0,0]、cθ=[0,0,0,0,1]；加入 Speed PI 积分 ξω 后，闭速度环的六状态矩阵为：

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} F_p - G_p K_{p\omega} c_\omega & G_p \\ -K_{i\omega} T_\omega c_\omega & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{bmatrix} G_p K_{p\omega} \\ K_{i\omega} T_\omega \end{bmatrix}.$$

速度命令到位置：

$$H_\theta(z_\omega) = [c_\theta\ 0](z_\omega I - A_{cl})^{-1} B_{cl}, \quad L_\theta(z_\omega) = K_{p,pos} H_\theta(z_\omega).$$

$$T_\theta(z_\omega) = \frac{L_\theta(z_\omega)}{1 + L_\theta(z_\omega)}.$$

页面因此不是简单在数位速度闭环后任意乘一个近似 1/s，而是精确累积该 held-voltage plant 的位置状态。数位 Command Tracking 另外以平滑轨迹的解析导数关系 jω、(jω)²加入前馈，并非用后向差分替代轨迹微分；仍排除限幅与非线性轨迹产生器。

11.3 版本与核对范围

2026-10-23 符号说明修订：补齐第 4.1 节 Kt / Kᴛ 定义、单位与固定 d 轴条件；第 5.4 节明确展开 Tq(s)，新增图 09；模拟程式与数值公式未修改。

手册图版修订：共十张同风格 SVG（包含图 09 的转矩路径与图 10 的 ZOH / RL 等效模型）；Current / Speed / Position 图为实际运算路径的分层表示，第 6 图则刻意采未饱和、忽略前馈的名义模型。两者用途不同，应配合本文章节阅读。

本手册依上述日期的本机程式原始码、控制方程、Bode 实作、波形栏位与既有模型回归结果编写；未因撰写手册而修改模拟器。本次文件核对不代表完成新的真实浏览器或硬体验证。若日后修改控制路径、预设值或资料栏位，应同步修订本手册。