MotorControl Lab 操作與控制系統實驗手冊

2026-10-23 修訂｜電機控制虛擬實驗室

軟體版本：v1.0.0｜手冊適用版本：v1.0.0

作者與開發者：葉志鈞博士（Dr. Jack Yeh）

MotorControl Lab 致力於建立一座可直接在網頁上操作的電機控制虛擬實驗室，將接近真實系統的馬達動態、數位控制與功率轉換行為，轉化為可觀察、可調整、可反覆驗證的學習與實驗環境。希望讓學習者從控制原理出發，透過即時仿真與波形分析，理解參數設定如何影響系統響應，縮短理論與實務之間的距離。

本平台兼顧教學與工程應用：教師與學生可用於課堂示範、自主學習及控制實驗；工程師則可快速調整控制器、比較不同設計與驗證仿真結果。在本平台涵蓋的模型與功能範圍內，使用者不必先另行搭建 MATLAB / Simulink 模型，即可直接在瀏覽器中進行初步分析與反覆測試，減少模型建置與操作準備的時間。

本手冊循序介紹 PMSM 的電流、速度與位置控制，並說明數位取樣、PWM、電壓限制、前饋及 anti-windup 的影響。公式採零初始條件；傳遞函數代表未飽和、小訊號的名義模型，實際時間波形則由含 PWM 切換的非線性模型計算。圖中的英文名稱與操作介面對照；HTML 版本可點選「放大查看」檢視向量圖細節。

版權聲明：© 2026 葉志鈞博士（Dr. Jack Yeh）。保留所有權利。 MotorControl Lab 自行開發之軟體、教學內容，以及本手冊的文字與圖表，版權均屬葉志鈞博士所有。未經授權，不得重製、修改、散布或用於商業用途；所使用之第三方軟體與資源，其權利歸各自權利人所有，並依各自授權條款使用。

版本基準：2026-10-22 數值模型；2026-10-23 手冊修訂。包含 Mechanical Condition 與 Controller Output / Anti-Windup 診斷。

目錄

1. 軟體用途與快速開始 3

2. 模式與訊號路徑 4

3. 參數、單位與預設值 6

4. 實際 PMSM 模型與各方塊方程式 9

5. 控制迴路傳遞函數 16

6. 數位控制與 PWM 時序 24

7. 波形與診斷讀法 32

8. Bode 與 FFT 頻譜分析 36

9. 六個實驗 40

10. 資料匯出、常見問題與實驗紀錄 42

11. 附錄：數位速度 / 位置模型 44

1. 軟體用途與快速開始

1.1 頁面各區功能

區域	操作與用途
語言 / Control Mode	選擇 English、繁體中文或简体中文，以及 Current、Speed、Position 模式
控制方塊圖	點選任一 Block，在右側檢查與修改對應參數；被旁路的方塊不參與該模式控制
參數面板	輸入 PI 增益、馬達參數、命令、限幅、PWM 與負載條件
Run / 執行模擬	以當下參數快照重新執行；Stop 可停止當次計算
結果指標	顯示最終轉速、最終 iq、峰值相電流、電壓飽和比例與計算耗時
Simulation Time Cursor / 時序游標	回看指定時間的 CNT、active / pending CCR、ADC 及感測狀態
Waveform instruments	切換控制響應、回授鏈、控制器 / AW 診斷、PWM / dead-time 波形
Loop Bode Analysis	選目前設定或上次模擬快照，檢查回授與命令追蹤頻率響應
FFT / 頻譜分析	選擇已記錄的時域訊號、來源與時間範圍，計算頻譜並匯出 FFT CSV；預設 Overview
CSV 匯出	保存該次結果、參數與 metadata；包含總覽及末段高速資料

1.2 第一次操作

1. 開啟既有 MotorControl Lab 頁面。首次載入需連網，以載入 Plotly 與 Pyodide / NumPy；等待引擎就緒。

2. 選 Current Control Mode，點 Current Ref。

3. Mechanical Condition 選 Locked Rotor；設定 id=0 A、iq=5 A、Start=0.02 s、Duration=0.25 s。

4. 點 PMSM，把負載設為 0 N·m；保留其餘預設值。

5. 執行模擬。在 dq current control 檢查 iq 是否追上 5 A。

6. 切換 Controller Output / Anti-Windup，對照 q 軸 P、I、PI raw 及向量限幅前後電壓。

7. 修改參數後必須重新執行。黃色「需重跑」提示表示圖仍是上次結果，不能當成新設定的結果。

每次執行都從零電流、零速度、零機械角開始；不是接續上次模擬。Bode 若選「目前設定」，可以先於時間波形更新，比較時要確認使用相同快照。

2. 模式與訊號路徑

2.1 Current Mode：電流控制

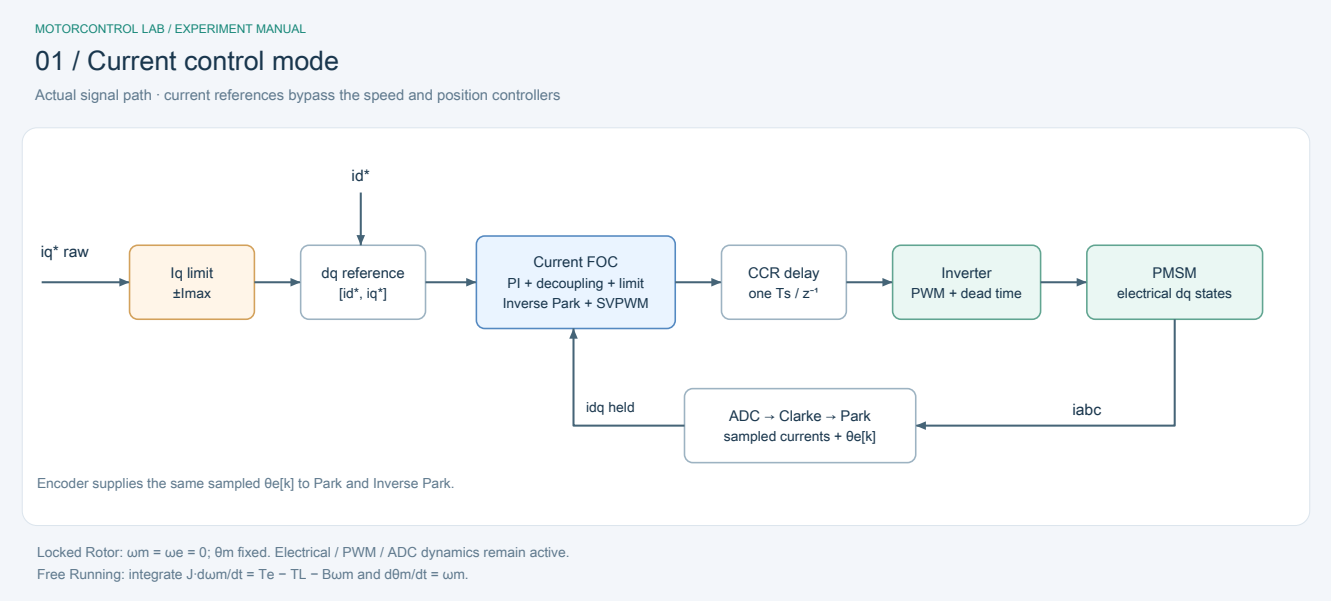

圖 01 | Current Mode 實際電流控制訊號路徑。藍色為控制器、橙色為限幅或 AW、綠色箭頭為前饋；實線箭頭表示訊號方向。

速度與位置控制器旁路。id 直接作為 d 軸命令；iq 經 q 軸電流命令限制。Current Mode 的 d 軸命令從模擬起點即生效，Start time 只控制 iq 階躍。

Mechanical Condition 是實驗操作條件：

• Locked Rotor（預設）：固定 ωm=0、ωe=0、θm=0。僅機械速度與角度不積分；dq 電流、轉矩、inverter、dead-time、ADC 與 FOC 仍正常運算。鎖定裝置的反力未另列為波形。

• Free Running：完整積分機械動態。固定正 iq 會產生正轉矩；無負載仍可能持續加速，最後因 back-EMF 與有限 DC bus 而無法維持電流。

機械條件僅對 Current Mode 生效。Speed / Position 一律使用自由機械動態。切換條件需重跑，並非執行中的即時鎖轉。

2.2 Speed Mode：速度控制

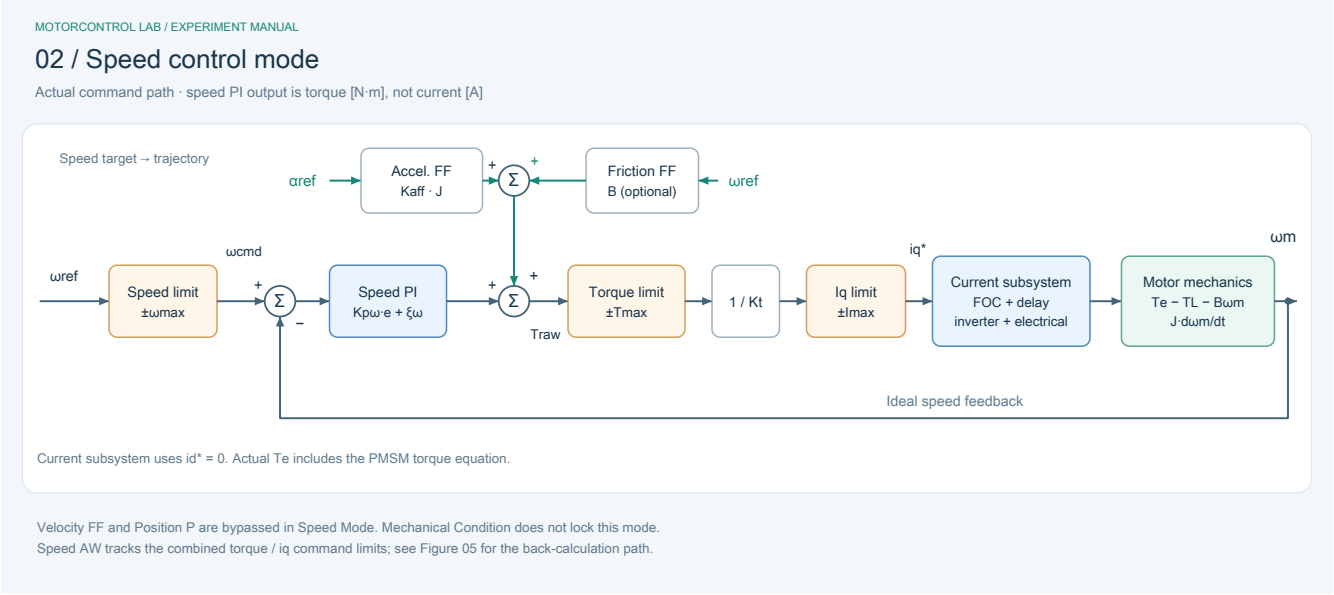

圖 02 | Speed Mode 速度 PI、轉矩 / 電流限制與內電流環。藍色為控制器、橙色為限幅或 AW、綠色箭頭為前饋；實線箭頭表示訊號方向。

速度 PI 輸出單位為 N·m；經 1/Kt 轉換後才是 A。此模式固定 id*=0，位置 P 與 Velocity FF 旁路。Acceleration FF 仍可使用。

2.3 Position Mode：位置控制

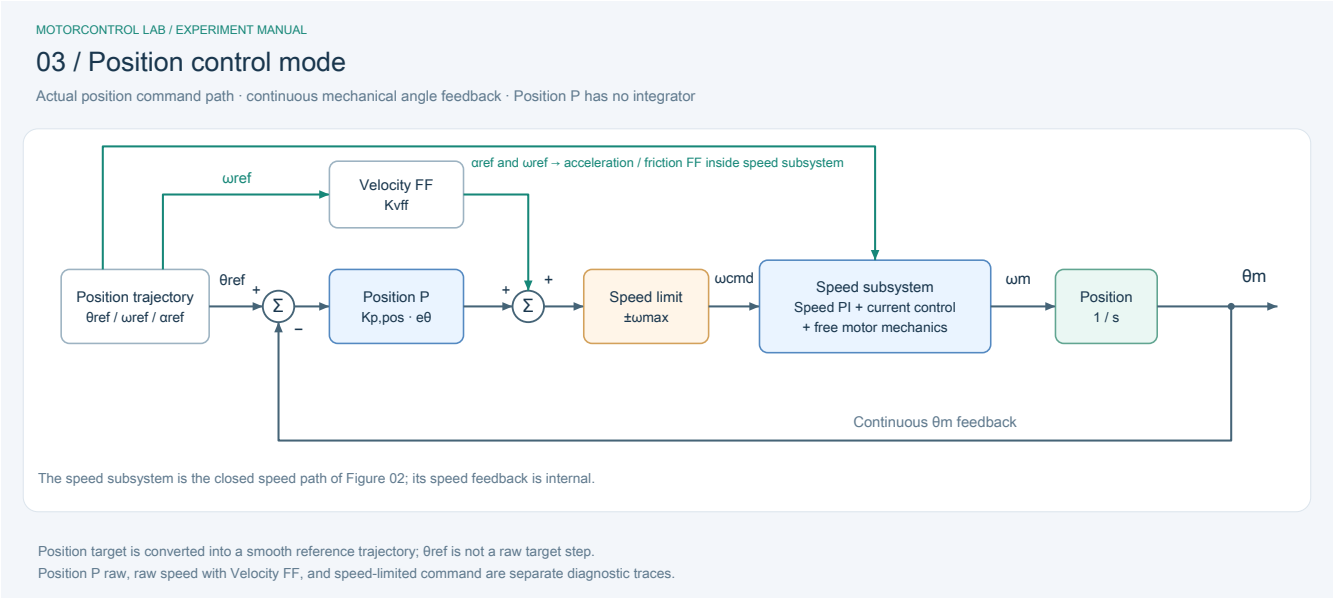

圖 03 | Position Mode 位置 P、軌跡前饋與速度子系統。藍色為控制器、橙色為限幅或 AW、綠色箭頭為前饋；實線箭頭表示訊號方向。

位置回授使用連續、不 wrap 的 θm，單位 rad，可觀察多圈運動。位置控制器只有 P，沒有位置積分或位置 AW。

3. 參數、單位與預設值

3.1 馬達與電力級

參數	意義	本版預設
Rs	每相等效電阻	1.2 Ω
Ld / Lq	d / q 軸電感	0.0057 / 0.0125 H
ψf	永磁磁鏈	0.03 Wb
p	極對數，總極數=2p	2
J	轉動慣量	0.00016 kg·m²
B	黏滯摩擦係數	0.0000028 N·m·s/rad
Vdc	直流母線	48 V
m	線性調變限制係數	0.95
Td	dead time 平均模型參數	1 μs，啟用
TL / Load time	負載轉矩 / 加入時間	0.15 N·m / 0.15 s

本版 Kt=1.5pψf=0.09 N·m/A；電壓向量限制約為 26.33 V。正負載 TL 會抵抗正向轉動；此處為指定方向的常數轉矩，不是隨速度改變方向的摩擦模型。

3.2 控制器與命令

參數	本版預設	說明
Kpd / Kid	5.7 / 1200	V/A、V/(A·s)
Kpq / Kiq	12.5 / 1200	V/A、V/(A·s)
Current Kaw	300 s^{-1}	電壓向量限幅回算
Kpω / Kiω	0.016 / 0.32	N·m/(rad/s)、N·m/rad
Speed Kaw	40 s^{-1}	轉矩及 q 電流限制回算
Kp,pos	15 s^{-1}	位置誤差 rad → 速度命令 rad/s
轉矩限制 / iq 限制	1.8 N·m / 12 A	兩個獨立限幅
Speed mode limit	1000 rad/s	速度模式命令限制
Position speed limit	30 rad/s	位置控制器合成命令限制
速度目標	1500 rpm	預設 Speed Step
位置目標	1 rad	從零開始的軌跡
Current iq 命令 / id*	1 A / 0 A	5 A 是本手冊實驗值，非出廠預設
軌跡最大速度 / 加速度	10 rad/s / 100 rad/s^2	最大速度用於位置軌跡
Kvff / Kaff	1 / 1	速度、加速度前饋皆預設啟用；摩擦前饋預設關閉
Start / Duration	0.02 s / 0.25 s	Duration 是總模擬時間，包含等待時間

Ki 輸入連續增益，不要先乘 Ts。 程式在積分更新時自行乘上控制週期。改變 Rs、Ld、Lq、J 等參數不會自動重新整定 PI。

3.3 時間基準

參數	本版預設
要求 PWM 頻率	10,000 Hz
Timer clock	100 MHz
ARR	5000
電流控制週期 Ts	100 μs
Speed divider M	1
速度 / 位置更新週期 Tω=M·Ts	100 μs
最少積分步 / PWM 週期	80
典型 plant 積分步長	1.25 μs；程式可自動縮小

Timer tick、plant 積分步長與控制週期是三個不同時間尺度。提高 ARR 不代表 plant 自動以每個 timer tick 積分。

4. 實際 PMSM 模型與各方塊方程式

4.1 電氣、轉矩與機械模型

$$
\begin{aligned}
L_d\dot{i}_d &= v_d - R_s i_d + \omega_e L_q i_q,\\
L_q\dot{i}_q &= v_q - R_s i_q - \omega_e (L_d i_d + \psi_f),\\
T_e &= \frac{3}{2} p\,[\psi_f i_q + (L_d - L_q) i_d i_q],\\
J\dot{\omega}_m &= T_e - T_L - B\omega_m,\\
\dot{\theta}_m &= \omega_m, \qquad \omega_e = p\omega_m.
\end{aligned}
$$

自由運轉時，程式用 midpoint RK2 積分四個狀態 id、iq、ωm、θm。堵轉時改為 ωm=0、θm 固定，電氣方程依然積分。

兩個轉矩常數的定義：Kt 與 Kτ（單位均為 N·m/A）

這兩個符號對應不同的方塊，不能只因為單位相同，就當成同一個參數。本文以拉丁字母 t 表示 Kt，以希臘字母 tau（τ）表示 Kτ。

符號	明確定義	在程式與訊號路徑中的用途
Kt：名義永磁轉矩常數	Kt = (3/2)pψf	命令換算用：速度 PI 輸出的轉矩命令先經限制，再用 1/Kt 換成 q 軸電流命令。這不是內電流環的傳遞函數。
Kτ：固定 d 軸工作點的增量轉矩常數	Kτ = ∂Te/∂iq，固定 id=id0	馬達產生轉矩用：小訊號 Δiq 經 Kτ 形成 ΔTe，包含該工作點的磁阻轉矩效應。

$$
K_t = \frac{3}{2} p\psi_f, \qquad i_{q,raw}^{*} = \frac{T_{lim}}{K_t}.
$$

Kτ 的來源：由 PMSM 轉矩公式逐步推導

步驟 1 | 從完整 PMSM 電磁轉矩方程出發。 永磁轉矩與磁阻轉矩都保留：

$$
T_e(i_d, i_q) = \frac{3}{2} p\,[\psi_f i_q + (L_d - L_q) i_d i_q].
$$

步驟 2 | 把 d 軸電流固定在工作點 id=id0。 此時 id0 是常數，將 iq 提出來：

$$
T_e(i_{d0}, i_q) = \frac{3}{2} p\,[\psi_f i_q + (L_d - L_q) i_{d0} i_q] = \frac{3}{2} p\,[\psi_f + (L_d - L_q) i_{d0}] i_q.
$$

固定的是 d 軸電流 id；接下來讓 q 軸電流 iq 改變。這裡不是令 id=iq，也不是對時間微分；「固定 id」也不等於 Locked Rotor（固定機械轉速）。

步驟 3 | 在 id 固定時，對 iq 取偏導數。 中括號內的量對 iq 都是常數，因此微分結果就是 iq 前面的係數：

$$\begin{aligned} K_\tau &\equiv \left.\frac{\partial T_e}{\partial i_q}\right|_{i_d=i_{d0}} \\ &= \frac{3}{2}p\left[\psi_f\frac{\partial i_q}{\partial i_q} + (L_d - L_q)i_{d0}\frac{\partial i_q}{\partial i_q}\right] \\ &= \frac{3}{2}p\left[\psi_f + (L_d - L_q)i_{d0}\right]. \end{aligned}$$

所以 Kτ 就是「d 軸電流保持 id0 時，q 軸電流每增加 1 A，電磁轉矩增加多少 N·m」的斜率，單位是 N·m/A；它是工作點的增量轉矩常數，不是 PI 增益或電流環傳遞函數。

步驟 4 | 換成方塊圖使用的增量關係。 令工作點 q 軸電流為 iq0、工作點轉矩為 Te0，並令 iq=iq0+Δiq：

$$T_{e0} = \frac{3}{2}p\left[\psi_f + (L_d - L_q)i_{d0}\right]i_{q0},$$

$$\begin{aligned} \Delta T_e &\equiv T_e(i_{d0}, i_{q0} + \Delta i_q) - T_{e0} \\ &= \frac{3}{2}p\left[\psi_f + (L_d - L_q)i_{d0}\right]\Delta i_q \\ &= K_\tau \Delta i_q \qquad (\Delta i_d = 0). \end{aligned}$$

因此，方塊圖中的 Δiq → Kτ → ΔTe 就來自以上偏導數。對本手冊採用的固定參數 PMSM 方程，在 id 嚴格固定時，上述增量關係本身是精確的；將它放入整個速度 Bode 模型時，仍採名義解耦、未飽和的小訊號分析條件。

此處 p 是極對數，ψf 是永磁磁鏈，id0 是分析工作點的 d 軸電流；Δ 表示工作點附近的小變動。固定 id 是使用單一 Kτ 方塊的條件。若 d 軸也有擾動，一般線性化還包含下式第二項，不能直接用單一路徑概括：

$$\Delta T_e = K_\tau \Delta i_q + \frac{3}{2}p(L_d - L_q)i_{q0}\Delta i_d.$$

id0=0 或 Ld=Lq 時，Kτ=Kt。非零 d 軸電流且 Ld≠Lq 時，實際轉矩含磁阻轉矩，不能一律把 Te 當成 Kt·iq。一般非線性時間模擬仍使用完整 PMSM 轉矩方程，不把 Kτ 當成額外可調馬達參數。

目前 Speed / Position 模式採 id*=0，名義分析使用 id0=0，因此兩者相同。以預設 p=2、ψf=0.03 Wb 為例，Kt=Kτ=0.09 N·m/A；此相等關係不代表電流閉環 Tq(s) 可以省略。速度迴路完整轉矩路徑見第 5.4 節。

4.2 Clarke、Park 與感測器

Clarke 為 amplitude-invariant：

$$i_\alpha = \frac{2i_a - i_b - i_c}{3}, \qquad i_\beta = \frac{i_b - i_c}{\sqrt{3}}.$$

Park 與 Inverse Park：

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} v_\alpha^* \\ v_\beta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & -\sin\theta_e \\ \sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{d,sat} \\ v_{q,sat} \end{bmatrix}.$$

Encoder 為理想感測器：θe=(pθm) mod 2π；沒有量化、雜訊或 observer。Park 與 Inverse Park 使用同一 ADC 事件鎖存的角度。座標轉換是矩陣運算，通常不以單一 scalar transfer function 表示；角度固定時可視為常數矩陣。

4.3 電流 PI、解耦與向量限幅

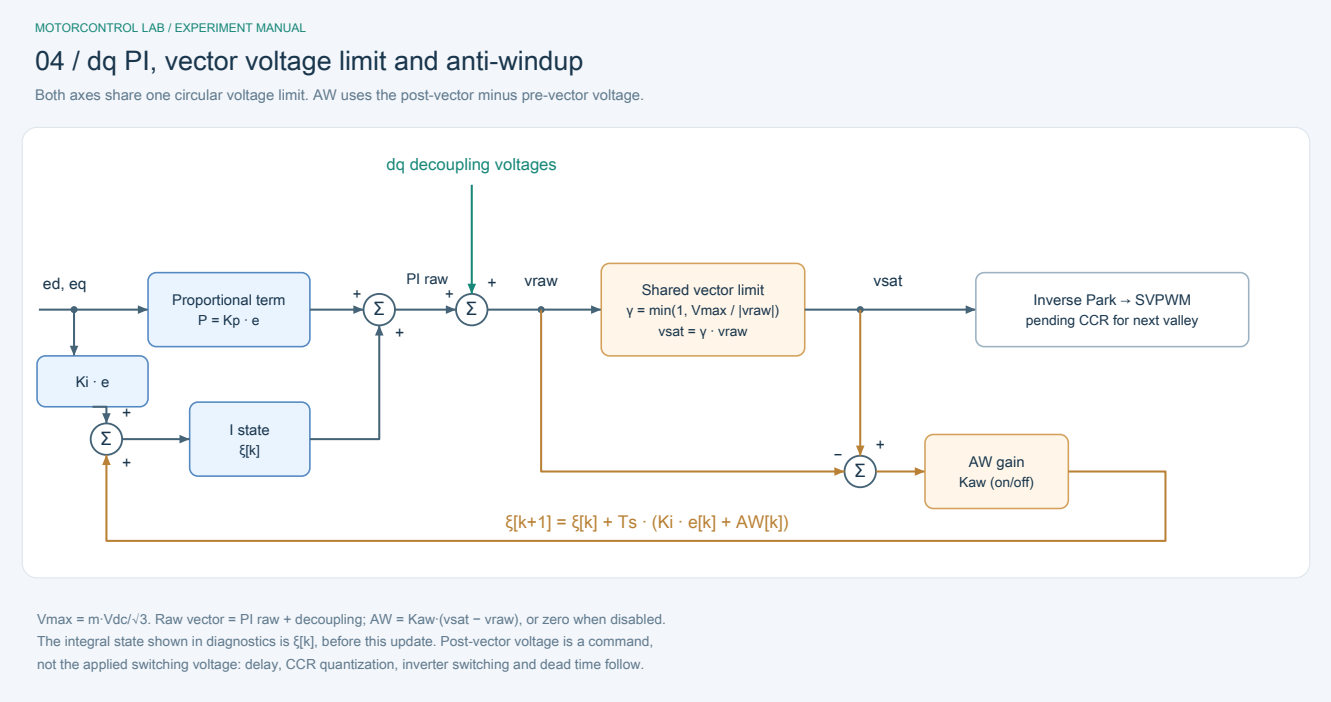

圖 04 | dq PI、共用向量電壓限幅與 AW 回算。藍色為控制器、橙色為限幅或 AW、綠色箭頭為前饋；實線箭頭表示訊號方向。

對 a∈{d,q}：

$$e_a = i_a^* - i_{a,held}, \qquad u_{a,PI} = K_{pa} e_a + x_a.$$

啟用 decoupling 時：

$$v_{d,ff} = -\omega_e L_q i_{q,held}, \qquad v_{q,ff} = \omega_e (L_d i_{d,held} + \psi_f).$$

關閉時兩個前饋項為零。向量限幅前電壓包含解耦項：

$$\boldsymbol{v}_{raw} = \begin{bmatrix} u_{d,PI} + v_{d,ff} \\ u_{q,PI} + v_{q,ff} \end{bmatrix}, \quad V_{max} = m\frac{V_{dc}}{\sqrt{3}}, \quad \gamma = \min\left(1, \frac{V_{max}}{\|\boldsymbol{v}_{raw}\|}\right), \quad \boldsymbol{v}_{sat} = \gamma \boldsymbol{v}_{raw}.$$

零向量時取 γ=1。這是共享圓形向量限幅，不是 d、q 各自裁切 ±Vmax。

$$AW_a = \begin{cases} K_{aw}(v_{a,sat} - v_{a,raw}), & AW\ on \\ 0, & AW\ off \end{cases}$$

$$x_a[k+1] = x_a[k] + T_s\{K_{ia} e_a[k] + AW_a[k]\}.$$

先用 x[k] 算輸出，再更新 x[k+1]。正向飽和時，AW 通常為負，抑制積分繼續增長；但 I state 不一定因此變小或回到零，仍取決於 Ki·e 與 AW 的合成值。

4.4 Speed PI、限制與回算

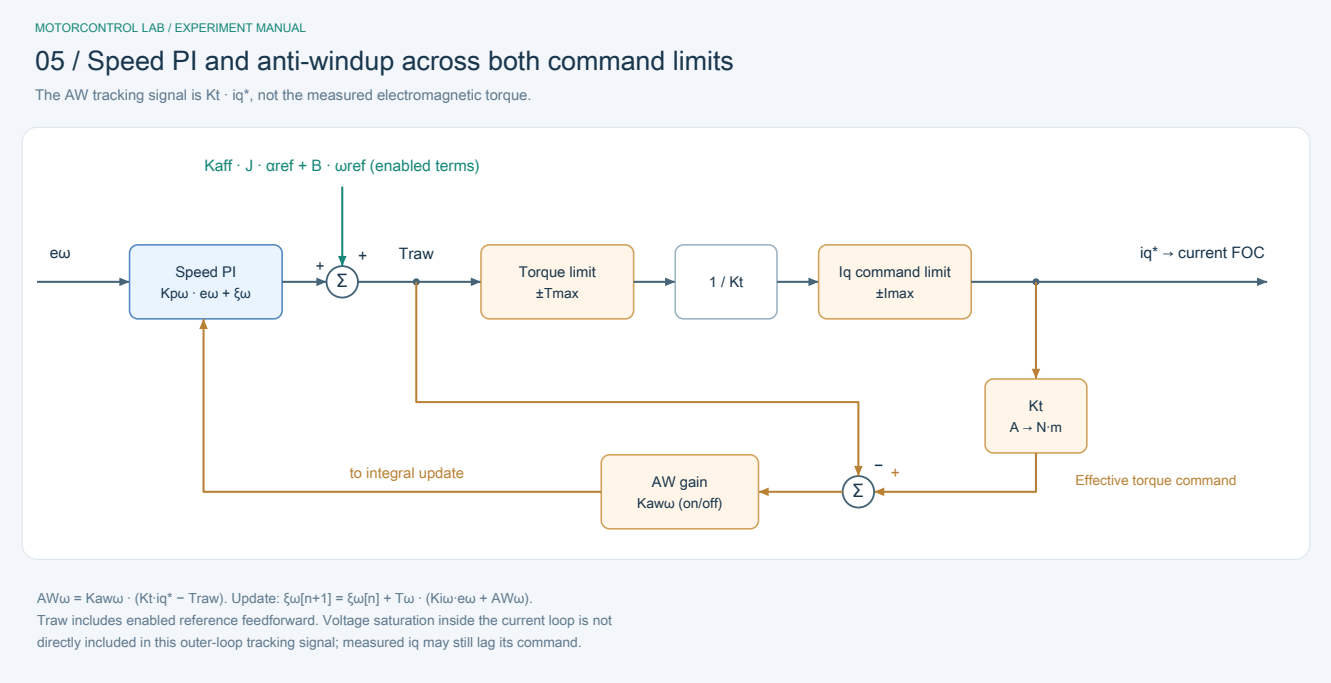

圖 05 | Speed PI 跨轉矩與電流命令限制的 AW 回算。藍色為控制器、橙色為限幅或 AW、綠色箭頭為前饋；實線箭頭表示訊號方向。

$$e_\omega = \omega_{cmd} - \omega_m, \quad T_{fb} = K_{p\omega} e_\omega + x_\omega.$$

令開關 σa、σB∈{0,1}：

$$T_{raw} = T_{fb} + \sigma_a K_{aff} J \alpha_{ref} + \sigma_B B \omega_{ref},$$

$$T_{lim} = \mathrm{clip}(T_{raw}, \pm T_{max}), \quad i^*_{q,raw} = \frac{T_{lim}}{K_t}, \quad i^*_q = \mathrm{clip}(i^*_{q,raw}, \pm I_{max}).$$

$$AW_\omega = \begin{cases} K_{aw\omega}(K_t i^*_q - T_{raw}), & AW\ on \\ 0, & AW\ off \end{cases}$$

$$x_\omega[n+1] = x_\omega[n] + T_\omega(K_{i\omega} e_\omega[n] + AW_\omega[n]).$$

回算同時包含轉矩及電流命令限幅，並以含前饋的 Total raw 為基準。它沒有直接追蹤因電壓不足造成的實際 iq 落後；因此 Te* 未碰轉矩 / 電流限制時，速度 AW 可能為零，即使內電流環已電壓飽和。

4.5 Position P、軌跡與前饋

$$\omega_{fb} = K_{p,pos}(\theta_{ref} - \theta_m), \quad \omega_{raw} = \omega_{fb} + \sigma_v K_{vff} \omega_{ref}, \quad \omega_{cmd} = \mathrm{clip}(\omega_{raw}, \pm \omega_{max}).$$

4.5.1 先分清位置、速度與加速度的曲線

Trajectory Generator 在 Position 模式產生的是分段位置軌跡，不是一條從頭到尾使用同一組係數的拋物線。加速段的位置是二次函數，等速段的位置是一次函數，減速段的位置是另一個二次函數；運動前後位置保持常數。對應的速度是分段直線，加速度是分段常數。本版沒有 S-curve / jerk 限制，加速度在階段切換時可跳變。

本版每次從位置 θ=0、速度=0 開始，到指定目標 θf 停下；不提供任意初始位置、初始速度或直接輸入多項式係數的功能。定義：

$$\theta_f = \text{Target Position}, \qquad D = |\theta_f|, \qquad \sigma = \mathrm{sgn}(\theta_f), \qquad u = t - t_0.$$

t 是模擬時間，t0 是 UI 的 Start / Reference step time，u 是「從軌跡開始後算起」的局部時間。V 是 Max Velocity (position)，A 是 Max Acceleration，兩者輸入正的上限幅值；負向移動由 θf 的正負號決定。

$$t_a = \min\left(\frac{V}{A}, \sqrt{\frac{D}{A}}\right), \qquad v_p = A t_a, \qquad t_c = \max\left(0, \frac{D}{v_p} - t_a\right), \qquad T = T_{move} = 2t_a + t_c.$$

ta 是加速時間，對稱減速也用 ta；tc 是等速時間；vp 是實際規劃峰值速度，可能小於設定的 V。D≤V²/A 時 tc=0，為三角形速度軌跡；D>V²/A 時才有等速段，為梯形速度軌跡。D=0 為全程靜止的特例，不使用上式的除法。規劃完成時間是 t0+T；模擬 Duration 還應留足定位收斂時間。

4.5.2 程式實際使用的分段方程式

以下為 D>0 時的位置參考，與目前 Python trajectory 函式一致：

$$\theta_{ref}(t) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \sigma \frac{A}{2} u^2, & 0 \le u < t_a, \\ \sigma\left[\frac{A}{2} t_a^2 + v_p(u - t_a)\right], & t_a \le u < t_a + t_c, \\ \theta_f - \sigma \frac{A}{2}(T - u)^2, & t_a + t_c \le u < T, \\ \theta_f, & u \ge T. \end{cases}$$

二次曲線出現在上式的加速段與減速段。 tc=0 時中間的等速段長度為零，自動省略；仍有前後兩段不同的二次函數，不是只使用一條二次曲線。

速度與加速度參考由同一條位置軌跡解析求導，供前饋使用：

$$\omega_{ref}(t) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \sigma A u, & 0 \le u < t_a, \\ \sigma v_p, & t_a \le u < t_a + t_c, \\ \sigma A (T - u), & t_a + t_c \le u < T, \\ 0, & u \ge T, \end{cases}$$

$$\alpha_{ref}(t) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \sigma A, & 0 \le u < t_a, \\ 0, & t_a \le u < t_a + t_c, \\ -\sigma A, & t_a + t_c \le u < T, \\ 0, & u \ge T. \end{cases}$$

位置與速度在交界處連續；加速度在交界處採右側階段的值，與程式的區間判斷相同。上述是「參考軌跡」，不代表實際 θm、ωm、dωm/dt 一定跟得上。

4.5.3 二次式係數如何由 UI 決定

若把每一段都寫成同一個局部時間 u 的多項式：

$$\theta_{ref} = c_2 u^2 + c_1 u + c_0,$$

其係數不是獨立輸入，而是由 A、V、θf 算出 ta、tc、T 後決定：

階段	c2（rad/s²）	c1（rad/s）	c0（rad）
加速	σA/2	0	0
等速	0	σvp	−σA·ta²/2
減速	−σA/2	σA·T	θf−σA·T²/2
完成後保持	0	0	θf

UI 的 Max Acceleration=A 是加速度，不是二次項係數。 因為位置微分兩次會得到 2c2，所以加速段 c2=σA/2；例如 A=100，正向加速段的二次項係數就是 50，不是 100。上述係數以 u=t−t0 表示，不要直接把 u 換成全域時間 t 而仍沿用相同係數。

UI 參數	對曲線的作用	實際設定方法
Target Position / θm* continuous	決定位移大小、方向與最後位置 θf	Position Control 的目標位置，或 Trajectory Generator 的 Target Position；共用同一參數
Max Acceleration	設定 A，改變加速 / 減速段的曲率，即 ±A/2	點 Trajectory Generator 修改；數值愈大代表規劃加減速愈快
Max Velocity (position)	設定速度上限 V，影響峰值速度、是否有等速段及總時間	點 Trajectory Generator 修改；短行程不一定達到 V
Start / Reference step time	設定 t0，只平移整段軌跡的開始時間	點 Target Position 修改；不改變以 u 表示的各段係數
Duration	設定模擬總長度，不是多項式係數	應涵蓋 Start+Tmove，並留收斂時間；太短只會截斷觀察

Position Kp、Kvff、Kaff 影響回授 / 前饋如何追蹤軌跡，不用來設定軌跡多項式係數。Speed profile 的 Step / Ramp 只作用於 Speed 模式，在 Position 模式不生效。

4.5.4 實驗五的二次式與係數實例

實驗五設定 θf=1 rad、V=10 rad/s、A=100 rad/s²、t0=0.02 s。由此得到 ta=0.1 s、tc=0、T=0.2 s，局部時間為 u=t−0.02：

$$\theta_{ref}(t)=\begin{cases}0, & t<0.02,\\ 50(t-0.02)^2, & 0.02\le t<0.12,\\ 1-50(0.22-t)^2, & 0.12\le t<0.22,\\ 1, & t\ge 0.22.\end{cases}$$

等價地，用 u 展開為：

$$\theta_{ref}=\begin{cases}50u^2, & 0\le u<0.1,\\ -50u^2+20u-1, & 0.1\le u<0.2.\end{cases}$$

加速段的 (c2,c1,c0)=(50,0,0)；減速段為 (−50,20,−1)。兩段使用相同的 u=t−0.02，只是分段係數不同；不是讓使用者把三個係數分別填進 UI。

模擬時間 t (s)	局部時間 u (s)	位置參考 θref (rad)	速度參考 ωref (rad/s)
0.02	0	0	0
0.07	0.05	0.125	5
0.12	0.10	0.5	10
0.17	0.15	0.875	5
0.22	0.20	1	0

因此，想改變二次段的彎曲程度，要改 Max Acceleration；想改位移或方向，要改 Target Position；想改速度上限，要改 Max Velocity。三者仍須共同滿足「從靜止出發、到目標停止」的分段邊界條件，不能任意指定獨立 c2、c1、c0。

4.5.5 Speed 模式的 Step / Ramp

Speed Step 在起點直接改變速度參考，程式設定 αref=0，不產生理想微分脈衝前饋。Speed Ramp 則以 A 限制加速，直到速度目標。軌跡產生器及各限幅均為非線性 / 分段運算，沒有涵蓋全部行為的單一 LTI 傳遞函數。

4.6 SVPWM、Timer 與 inverter

$$v_a^* = v_\alpha^*, \quad v_b^* = -\frac{1}{2}v_\alpha^* + \frac{\sqrt{3}}{2}v_\beta^*, \quad v_c^* = -\frac{1}{2}v_\alpha^* - \frac{\sqrt{3}}{2}v_\beta^*,$$

$$v_0 = -\frac{\max(v_a^*, v_b^*, v_c^*) + \min(v_a^*, v_b^*, v_c^*)}{2}, \quad D_x = \text{clip}\left(\frac{1}{2} + \frac{v_x^* + v_0}{V_{dc}}, 0, 1\right).$$

$$ARR = \text{round}\left(\frac{f_{timer}}{2f_{requested}}\right), \quad f_{PWM,actual} = \frac{f_{timer}}{2ARR}, \quad CCR_x = \text{round}(D_x ARR).$$

CNT 為 0→ARR→0 的三角載波；Sx=1 當 CNT<active CCRx，否則為 0。

$$v_{xO} = S_x V_{dc} + \Delta v_{xO}, \quad \Delta v_{xO} = -V_{dc} T_d f_{PWM} \,\text{sgn}(i_x), \quad v_{xn} = v_{xO} - \frac{v_{aO} + v_{bO} + v_{cO}}{3}.$$

本模型是切換波形加上週期平均 dead-time 電壓擾動，沒有逐一模擬互補 gate blanking、二極體壓降或寄生元件。未飽和平均小訊號模型中，電壓命令到平均電壓可取單位增益，再單獨處理 hold / 延遲；不能再額外乘一次 Vdc，因為輸入已是 V。

5. 控制迴路傳遞函數

5.1 使用條件與符號

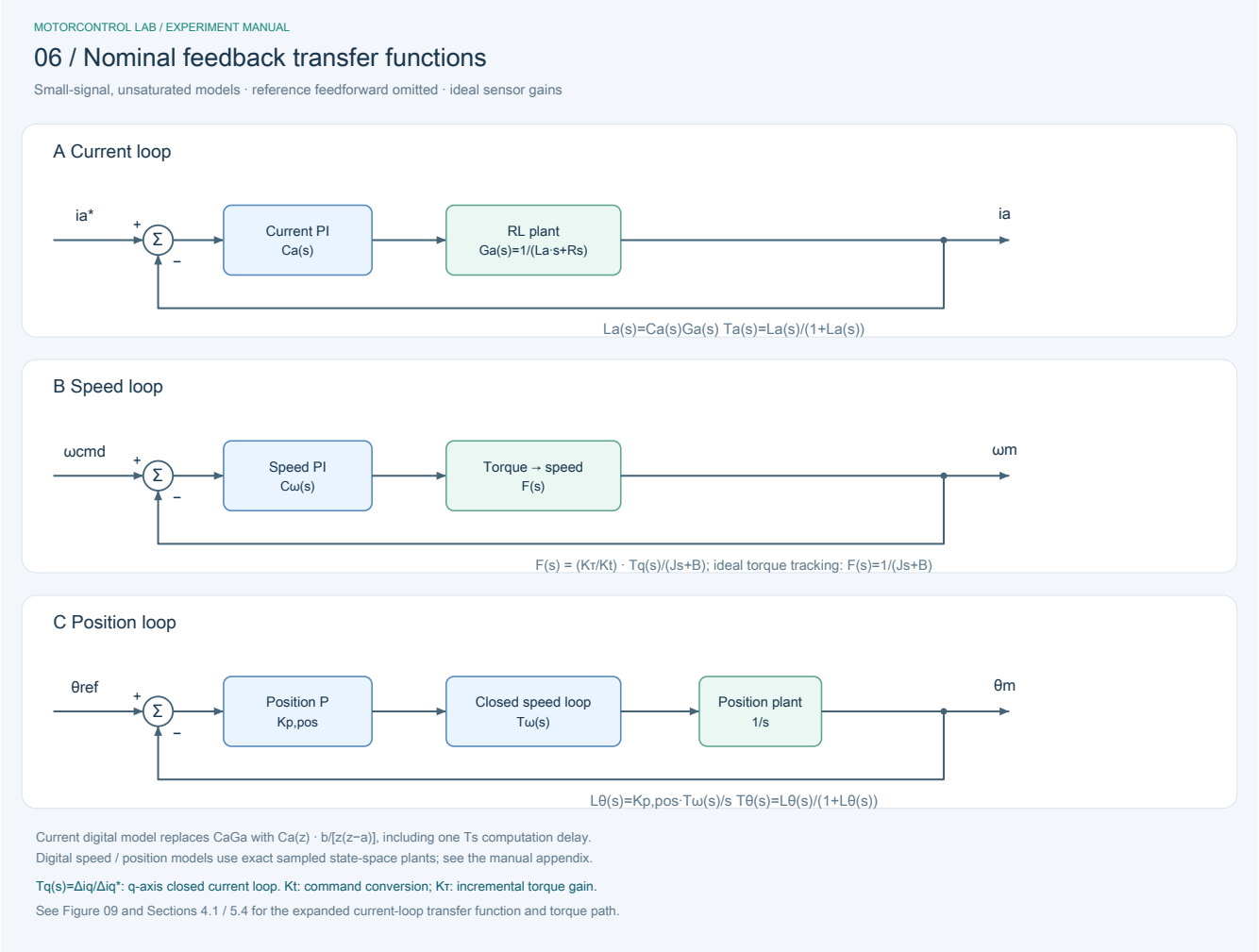

圖 06 | 電流、速度與位置的名義負回授傳遞函數。藍色為控制器、橙色為限幅或 AW、綠色箭頭為前饋；實線箭頭表示訊號方向。

以下連續模型假設理想 dq 解耦、固定名義參數、未碰限幅，並以平均電壓取代 switching ripple；暫不含 ADC / 運算延遲與 dead-time 非線性。s 為 Laplace 變數；z 為離散時間變數。回授感測器名義增益 H=1。

5.2 各 Block 的數學表示速查

頁面 Block	名義線性表示 / 實際運算	適用範圍
Current PI d/q	Ca(s)=Kpa+Kia/s；數位 Ca(z)=Kpa+Kia·Ts/(z−1)	AW 與限幅另依第 4 節
PMSM electrical	Ga(s)=1/(La·s+Rs)	理想解耦或零速；非完整耦合 PMSM
Speed PI	Cω(s)=Kpω+Kiω/s	輸入 rad/s、輸出 N·m
1/Kt	常數增益 1/(1.5pψf)	輸入 N·m、輸出 A
Torque production	局部 q 軸增益 Kτ	固定 d 軸工作點；一般 Te 為非線性
Mechanical speed	Gm(s)=1/(Js+B)	輸入淨電磁 / 負載轉矩；堵轉時不使用自由機械 plant
Speed → position	1/s	連續自由轉動模型；離散分析精確積分位置狀態
Position P	Cθ=Kp,pos	無位置 I / AW
Velocity FF	Kvff	ωref→速度求和點，僅 Position
Acceleration FF × J	Kaff·J	輸入 αref 時為常數增益；以 ωref 為輸入才表示為 Kaff·J·s
Friction FF	B	ωref→轉矩求和點，受開關控制
Encoder speed/position feedback	名義 H=1；θm→電角為 p 倍後 wrap	理想感測；wrap 不屬單一全域 LTI 方塊
Clarke / Park / Inverse Park	第 4.2 節矩陣	轉角可隨時間變化，不以單一 scalar TF 概括
ADC sample/hold	離散同步取樣與保持	已納入數位迴路定義；不是額外隨意加的時間延遲
Computation / CCR update	z^{-1}	一個 current Ts
SVPWM / inverter	平均、未飽和電壓命令通道可近似增益 1	實際為 duty 計算、量化、PWM 切換及 dead-time 擾動
Trajectory / limits / AW	分段軌跡、clip、向量縮放與狀態更新	非線性運算，不強行賦予全域 LTI TF

5.3 d / q 電流迴路

解耦後的 plant 與 PI：

$$G_d(s) = \frac{1}{L_d s + R_s}, \quad G_q(s) = \frac{1}{L_q s + R_s}, \quad C_a(s) = K_{pa} + \frac{K_{ia}}{s}.$$

$$L_a(s) = C_a(s) G_a(s) = \frac{K_{pa} s + K_{ia}}{s(L_a s + R_s)},$$

$$T_a(s) = \frac{i_a}{i_a^*} = \frac{L_a}{1 + L_a} = \frac{K_{pa} s + K_{ia}}{L_a s^2 + (R_s + K_{pa}) s + K_{ia}}.$$

若 Kpa=La·ωc、Kia=Rs·ωc，理想連續模型可約去 RL 極點：

$$L_a(s) = \frac{\omega_c}{s}, \qquad T_a(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}.$$

本版預設兩軸均有 ωc=1000 rad/s，因此理想頻寬為 1000/(2π)≈159.15 Hz。網頁 Bode 分析區中的 d / q 電流迴路頻率響應 採含離散延遲模型，數值不必等於此理想值。 堵轉時即使閾閉解耦，ωe=0 仍使旋轉耦合項消失。

上式令 a=q 即為 Tq(s)。第 5.4 節會再次明確標示其輸入、輸出與完整展開式，避免在速度迴路中把 Tq(s) 誤認為轉矩常數。

5.4 速度迴路：三種模型

先看 UI 的 Speed model 三選項對照表。 這裡的 Speed model 是 Bode 分析用的「速度模型」，與頁面上方 Current / Speed / Position 的 Control Mode 不同。

Speed model 選項	內電流環如何處理	是否包含數位延遲
Ideal Inner Current Loop	假設電流 / 轉矩即時追蹤，Tq=1；不保留內電流環動態	不考慮取樣 / 運算延遲
With Current Loop Dynamics	使用連續 q 軸電流閉環；一般未約分式為二階，目前預設極零點對消後可約成一階	不考慮取樣 / 運算延遲
With Digital Delay	同時保留電流環動態，使用離散 PI 與精確 ZOH plant	包含一個電流控制週期的運算 / CCR 更新延遲，以及已納入的取樣 / 保持效應

第三個不是只加 delay、把電流環動態拿掉，而是將兩者一起納入。 它也不是把第二個的連續閉環直接乘上 exp(−1.5sTs)，而是由離散系統計算。1.5Ts 是理解低頻平均延遲的連續近似，詳見第 5.4.2 節；不要額外重複加入目前數位模型。

選項影響範圍： 切換 Speed model 會改變速度 / 位置 Bode 的分析模型，不會切換時間模擬引擎。d / q 電流 Bode 一直使用第 6 節的含延遲離散模型，不會因選 Ideal 而變成理想增益 1。時間模擬仍使用同一套實際電流控制、ADC / CCR 時序與 PWM 切換模型。

以下再依序給出三種速度分析模型的公式；預設一階約分見第 5.4.1 節，精確數位模型見第 6 節與附錄。

$$C_\omega(s) = K_{p\omega} + \frac{K_{i\omega}}{s}, \qquad G_m(s) = \frac{1}{Js + B}.$$

Ideal inner current loop：假定轉矩即時追蹤，令 F(s)=Gm(s)：

$$L_\omega^{ideal}(s) = \frac{K_{p\omega}s + K_{i\omega}}{s(Js + B)},$$

$$T_\omega^{ideal}(s) = \frac{K_{p\omega}s + K_{i\omega}}{Js^2 + (B + K_{p\omega})s + K_{i\omega}}.$$

代入預設值：

$$T_\omega^{ideal}(s) = \frac{0.016s + 0.32}{0.00016s^2 + 0.0160028s + 0.32}.$$

理想轉矩追蹤時，負載擾動的響應為：

$$\frac{\omega_m(s)}{T_L(s)} = -\frac{G_m(s)}{1 + C_\omega(s)G_m(s)}.$$

With current-loop dynamics：明確包含 q 軸電流閉環 Tq(s)

這裡的 Tq(s) 是「q 軸電流命令 → 實際 q 軸電流」的閉環傳遞函數，不是轉矩常數，也不是速度閉環。下標 q 指 q 軸；比值的輸入、輸出都是電流，因此 Tq(s) 無因次。以下各傳遞函數以工作點附近的增量定義：

$$\boxed{T_q(s) \equiv \frac{\Delta i_q(s)}{\Delta i_q^*(s)}}.$$

q 軸名義解耦電氣 plant、電流 PI 與開迴路分別為：

$$G_q(s) = \frac{\Delta i_q(s)}{\Delta v_q(s)} = \frac{1}{L_q s + R_s}, \qquad C_q(s) = K_{pq} + \frac{K_{iq}}{s}, \qquad L_q^{OL}(s) = C_q(s)G_q(s).$$

此處上標 OL 表示開迴路，避免與電感 Lq 混淆。由單位負回授閉合電流環：

$$\boxed{T_q(s) = \frac{C_q(s)G_q(s)}{1 + C_q(s)G_q(s)} = \frac{C_q(s)}{L_q s + R_s + C_q(s)}}.$$

將電流 PI 展開，就能直接看見 Kpq、Kiq 與 Lq、Rs：

$$\boxed{T_q(s) = \frac{K_{pq}s + K_{iq}}{L_q s^2 + (R_s + K_{pq})s + K_{iq}}}.$$

預設 Lq=0.0125 H、Rs=1.2 Ω、Kpq=12.5、Kiq=1200，故本版連續 q 軸閉環為：

$$T_q(s) = \frac{12.5s + 1200}{0.0125s^2 + 13.7s + 1200}.$$

5.4.1 一般為二階；預設極零點對消後可約成一階

上面的分母二次式是一般 PI 參數的未約分閉環形式。目前預設參數已經做名義 RL 極點與 PI 零點對消，因此此連續輸入 / 輸出傳遞函數的最小階數是一階。 不能只停在二階式，而忽略這個預設條件。

對消條件與預設值為：

$$\frac{K_{iq}}{K_{pq}} = \frac{R_s}{L_q}, \qquad \frac{1200}{12.5} = \frac{1.2}{0.0125} = 96\ \mathrm{s}^{-1}.$$

此時 PI 零點與電氣 plant 極點同在 s=−96 s⁻¹。將一般式因式分解：

$$\begin{aligned} T_q(s) &= \frac{12.5s + 1200}{0.0125s^2 + 13.7s + 1200} \\ &= \frac{12.5(s+96)}{0.0125(s+96)(s+1000)} \\ &= \boxed{\frac{1000}{s+1000} = \frac{1}{0.001s+1}}. \end{aligned}$$

一般化地，在精確對消條件下：

$$C_q(s)G_q(s) = \frac{K_{pq}}{L_q s} = \frac{\omega_c}{s}, \qquad T_q(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}, \qquad \omega_c = \frac{K_{pq}}{L_q}.$$

所以預設 ωc=1000 rad/s、時間常數 1/ωc=1 ms、連續無延遲 −3 dB 頻寬約 1000/(2π)=159.15 Hz。這是零初始條件下的傳遞函數約分，不是刪除模擬器的積分器或馬達狀態。若改過 PI、Rs 或 Lq 而未維持對消條件，就應回到一般二階式；參數誤差、未完全解耦、數位取樣及延遲也會使理想結果不再精確適用。

這裡的一階 Tq(s) 仍是 With current-loop dynamics 的「無延遲連續模型」。 下一個延遲說明小節會解釋，為何加進迴路內的延遲後，不能直接宣稱整個閉環仍是這個無延遲一階式。

先分開看 1/Kt、Tq(s)、Kτ 與 Gm(s) 四個方塊，再合併成速度 PI 所見的 F(s)： 轉矩命令先以 1/Kt 換算成電流命令，電流閉環 Tq(s) 產生實際 iq，馬達以 Kτ 轉成電磁轉矩，最後經機械動態 Gm(s) 產生速度。此為忽略限幅、前饋與負載擾動輸入的名義回授分析路徑。

$$\Delta T_e^* \xrightarrow{1/K_t} \Delta i_q^* \xrightarrow{T_q(s)} \Delta i_q \xrightarrow{K_\tau} \Delta T_e \xrightarrow{G_m(s)} \Delta \omega_m.$$

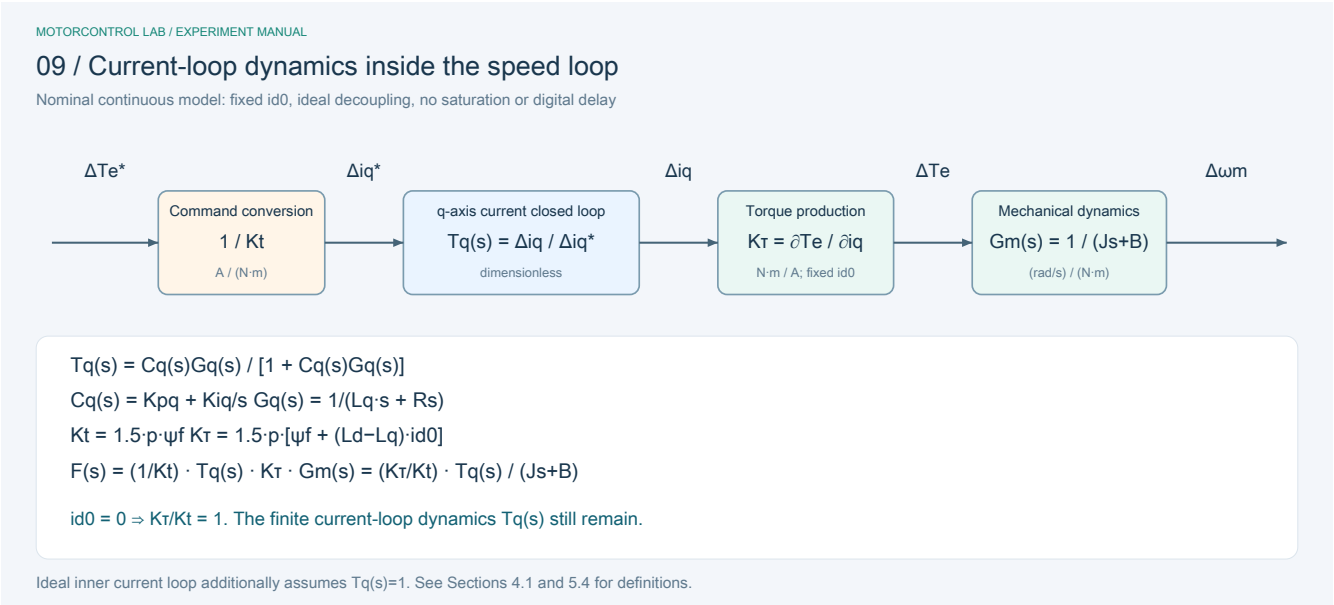

圖 09 | Tq(s) 表示命令電流到實際電流的閉環響應；1/Kt 是命令換算，Kτ 是固定 d 軸工作點的馬達增量轉矩增益。

$$F(s) \equiv \frac{\Delta\omega_m(s)}{\Delta T_e^*(s)} = \frac{1}{K_t}\, T_q(s)\, K_\tau\, G_m(s) = \frac{K_\tau}{K_t} T_q(s) \frac{1}{Js+B}.$$

在外速度單位負回授下：

$$L_\omega(s) = C_\omega(s)F(s), \qquad T_\omega(s) = \frac{\Delta\omega_m(s)}{\Delta\omega_m^*(s)} = \frac{C_\omega(s)F(s)}{1 + C_\omega(s)F(s)}.$$

Kt、Kτ 的正式定義與線性化條件見第 4.1 節。 目前 Speed / Position 的名義工作點 id0=0，所以 Kτ/Kt=1，但仍有：

$$F(s) = T_q(s)G_m(s) \neq G_m(s) \quad （一般情況）.$$

因此，消掉的是 Kτ/Kt，比值為 1；並沒有消掉 Tq(s)。只有選擇 Ideal inner current loop、假設電流 / 轉矩即時追蹤時，才令 Tq(s)=1。With current-loop dynamics 使用上述連續電流閉環，忽略取樣 / 運算延遲；其模型假設為名義理想 dq 解耦、未飽和、固定 d 軸工作點，不包含 dead-time、CCR 量化、限幅或 AW 非線性。時間模擬仍使用完整切換 / 控制模型。

With digital delay：含離散 current PI、一個電流控制週期運算延遲、精確 held-voltage plant 及外環多速率保持，不能直接套用上述連續二階式。完整定義見第 6 節與附錄。

5.4.2 延遲的連續近似：為何常見 1.5Ts，而不是再多一個完整週期

本節是教學用的連續平均 / 低頻近似，不是新增 UI 模型，也沒有改寫目前 With digital delay 的精確離散計算。 以下 Ts 指電流迴路的控制週期；目前每 PWM 週期取樣、更新一次，因此 Ts=TPWM。令 Td,eq 代表總等效控制延遲，與功率級的 Dead Time / dead-time 死區時間不同。

核對本版程式時序：valley k 先套用上一輪 pending CCR，再鎖存 ADC[k]；以此資料算出的新 duty / CCR[k+1]，要到 valley k+1 才啟用。因此，從 ADC[k] 到新 CCR 生效是 一個 Ts，包含計算、傳遞與等待下一個更新點的整體排程延遲；不是另外量到 CPU 一定需要運算整整 Ts。瀏覽器顯示的 Simulation Cost 也不是此控制延遲。

項目	本版的意義	連續平均 / 低頻近似
取樣到新 CCR 生效	ADC[k] → pending CCR[k+1] → 下一個 valley 套用	Ts
PWM / 命令保持的等效延遲	新 duty 在一個 PWM 週期內形成平均作用；以 ZOH / single-rate PWM 近似	Ts/2
合計	以上兩個不同作用的合併近似	Td,eq≈1.5Ts

不能解讀成「算一個 Ts，再等另一個完整 PWM 週期」。 下一個 valley 才啟用新 CCR 的這一次等待，已包含在第一列的 Ts 裡；第二列是保持 / 調變的等效半週期，不是額外的一拍暫存器。如果真的另有第二拍延遲，模型就必須另外辨識，不能仍套用本版的 1.5Ts。

從平均命令到平均輸出的連續重建模型，可將一拍延遲與正規化 ZOH 寫為：

$$D_{avg}(s) = e^{-sT_s}\frac{1 - e^{-sT_s}}{sT_s}.$$

ZOH 的頻率響應可拆成幅值項與半週期相位項：

$$\frac{1-e^{-j\omega T_s}}{j\omega T_s} = e^{-j\omega T_s/2}\frac{\sin(\omega T_s/2)}{\omega T_s/2}.$$

當 ωTs 足夠小，可近似忽略 sinc 幅值下降，故常用：

$$\boxed{D_{avg}(s) \approx e^{-sT_{d,eq}}, \qquad T_{d,eq} \approx T_s + \frac{T_s}{2} = 1.5T_s}.$$

這不是說所有同步取樣系統都必然是 1.5Ts：結果仍取決於取樣相位、更新點、運算能否趕上更新，以及 single-rate / double-rate 等配置。本版採 valley 取樣與下一個 valley 生效，所以適用上述一拍加半週期的平均近似；未另加感測器、類比濾波或 ADC 轉換延遲。

本版預設的實際時間換算： fPWM=10 kHz、ARR=5000、timer=100 MHz，所以：

$$T_s = \frac{2ARR}{f_{timer}} = 100\ \mu\text{s}, \qquad T_{d,eq} \approx 150\ \mu\text{s} = 0.15\ \text{ms}.$$

因此是 1.5 倍 Ts，不是 1.5 ms；只有 Ts=1 ms 時，1.5Ts 才等於 1.5 ms。預設電流閉環的一階時間常數 1 ms，與這裡的等效延遲 0.15 ms，也不是同一個量。當 fpwm / ARR 改變時應以實際 Ts 重算；speedDiv≠1 時，外環多速率模型不能直接換成 1.5 個速度週期。

延遲應放在哪裡？放在電流回授迴路內的致動通道。 在上述連續近似下：

$$L_{q,d}(s) \approx C_q(s)G_q(s)e^{-sT_{d,eq}}, \qquad T_{q,d}(s) \approx \frac{C_q(s)G_q(s)e^{-sT_{d,eq}}}{1+C_q(s)G_q(s)e^{-sT_{d,eq}}}.$$

預設 PI 與 RL 極零點對消後，CqGq=ωc/s，仍可化為：

$$\boxed{T_{q,d}(s) \approx \frac{\omega_c e^{-sT_{d,eq}}}{s+\omega_c e^{-sT_{d,eq}}}}.$$

分母也含延遲，所以它不再是單純的無延遲一階有理式。 不可把上式當成下列「無延遲閉環完成後才加輸出延遲」的模型；兩者的回授特徵方程不同：

$$\frac{\omega_c e^{-sT_{d,eq}}}{s+\omega_c e^{-sT_{d,eq}}} \neq \frac{\omega_c}{s+\omega_c}e^{-sT_{d,eq}}.$$

例如 ω=1000 rad/s、Td,eq=150 μs 時，這個延遲因子帶來約 −0.15 rad=−8.59° 的額外相位，會減少相位裕度。若只看無延遲的一階電流閉環，便看不到這項回授穩定性的影響。

與目前 UI 的對照： With current-loop dynamics 保留無延遲連續 Tq(s)；With digital delay 使用第 6 節的離散 PI、一拍延遲與精確 ZOH plant，速度 / 位置環另以狀態空間處理多速率。該數位模型已含這些效應，不得再額外乘一次 exp(−1.5sTs)，也不得再加一次半週期，否則會重複計入延遲。本節的 1.5Ts 只是用來理解其低頻平均相位效應，並不取代精確數位模型。

參考：imperix：取樣、控制更新與 PWM 調變延遲的區分；本版時序以 simulation.py 的 CCR queue 與 ui-2.js 的數位 Bode 實作核對。

5.5 位置迴路

先將速度回授閉合，令其閉環為 Tω(s)。外位置 P 為 Cθ=Kp,pos，速度到位置為 1/s：

$$L_\theta(s) = K_{p,pos}\frac{T_\omega(s)}{s}, \qquad T_\theta(s) = \frac{\theta_m}{\theta_{ref}} = \frac{K_{p,pos}T_\omega(s)}{s + K_{p,pos}T_\omega(s)}.$$

若速度閉環可近似為 1，則 Tθ≈Kp,pos/(s+Kp,pos)，預設理想位置頻寬約 15/(2π)=2.39 Hz。這只是內環足夠快、未限速時的近似。

使用理想電流 / 轉矩追蹤、但保留 Speed PI 動態時：

$$T_\theta(s) = \frac{K_{p,pos}(K_{p\omega}s + K_{i\omega})}{Js^3 + (B + K_{p\omega})s^2 + (K_{i\omega} + K_{p,pos}K_{p\omega})s + K_{p,pos}K_{i\omega}}.$$

預設為：

$$T_\theta(s) = \frac{0.24s + 4.8}{0.00016s^3 + 0.0160028s^2 + 0.56s + 4.8}.$$

5.6 前饋對「命令追蹤」的影響

定義 F(s) 為從合成轉矩命令到速度的名義 plant，並令：

$$Q(s) = \sigma_a K_{aff} J s + \sigma_B B, \qquad K_v = \sigma_v K_{vff}.$$

對平滑軌跡，αref=sωref、ωref=sθref，未限幅時：

$$\frac{\omega_m}{\omega_{ref}} = \frac{F(s)[C_\omega(s) + Q(s)]}{1 + F(s)C_\omega(s)}.$$

Position 模式則為：

$$\frac{\theta_m}{\theta_{ref}} = \frac{F(s)\{C_\omega(s)[K_{p,pos} + K_v s] + Q(s)s\}}{s + F(s)C_\omega(s)[s + K_{p,pos}]}.$$

前饋改變命令到輸出的分子，回授特徵方程不變，因此在這個未飽和線性模型下，Kvff / Kaff 不改變 feedback PM / GM，但可能改變 Command-Tracking Bandwidth。

頁面的 Command Tracking 是軌跡輸出參考到實際輸出的分析，不是「目標數字經非線性軌跡產生器」的整體傳遞函數。Speed Step 在時間模擬中 αref=0，所以不能把它與含 Js 前饋的平滑參考 Bode 直接當成同一個 step response。

6. 數位控制與 PWM 時序

6.1 與引擎一致的離散 PI

未飽和時，輸出與積分更新順序為：

$$u[k] = K_p e[k] + x[k], \qquad x[k+1] = x[k] + K_i T_s e[k].$$

因此：

$$C(z) = K_p + \frac{K_i T_s}{z - 1}.$$

此處不能任意改成 Kp+KiTs·z/(z−1)，兩者輸出 / 積分時序不同。速度 PI 將 Ts 換為 Tω。

6.2 連續 RL、前端 ZOH 與數位電流迴路的完整推導

6.2.1 實際 plant 仍是連續的；ZOH 位在 plant 前端

數位的是 PI 的運算與取樣訊號，不是把實際馬達變成數位元件。 以名義理想解耦的單一電流軸為例，令軸別 $\ell \in \{d,q\}$，連續電氣方程為：

$$L_\ell \frac{di_\ell(t)}{dt} + R_s i_\ell(t) = v_\ell(t), \qquad G_\ell(s) = \frac{I_\ell(s)}{V_\ell(s)} = \frac{1}{L_\ell s + R_s}.$$

L_ℓ 是電感，單位 H；$G_\ell(s)$ 才是連續 RL 受控體的電壓到電流傳遞函數。此名義方程假設 dq 解耦成立，忽略飽和、dead-time、切換諧波與未抵消的耦合 / 反電動勢擾動。

輸入命令序列 $v_\ell[k]$ 經前端保持器 ZOH 變成連續時間的分段常數電壓 $v_\ell(t)$，再作用於連續 RL；輸出端 ADC 在 kTs 取樣，得到 $i_\ell[k]$。所以應分成：

離散電壓序列 → 前端 ZOH → 連續 RL → 輸出取樣 → 離散電流序列。

後文的 $G_{\ell,\text{hold}}(z)$ 是上述「ZOH + 連續 RL + 輸出取樣」整組的離散等效，不是說連續馬達本體已變成離散 plant，也不是把 ZOH 移到 RL 後面。本版實際時間模擬仍計算 PWM 切換與連續狀態的數值積分；Bode 這裡則用平均電壓保持來建立名義線性模型，不能把實際切換電壓誤認為每週期完全平坦。

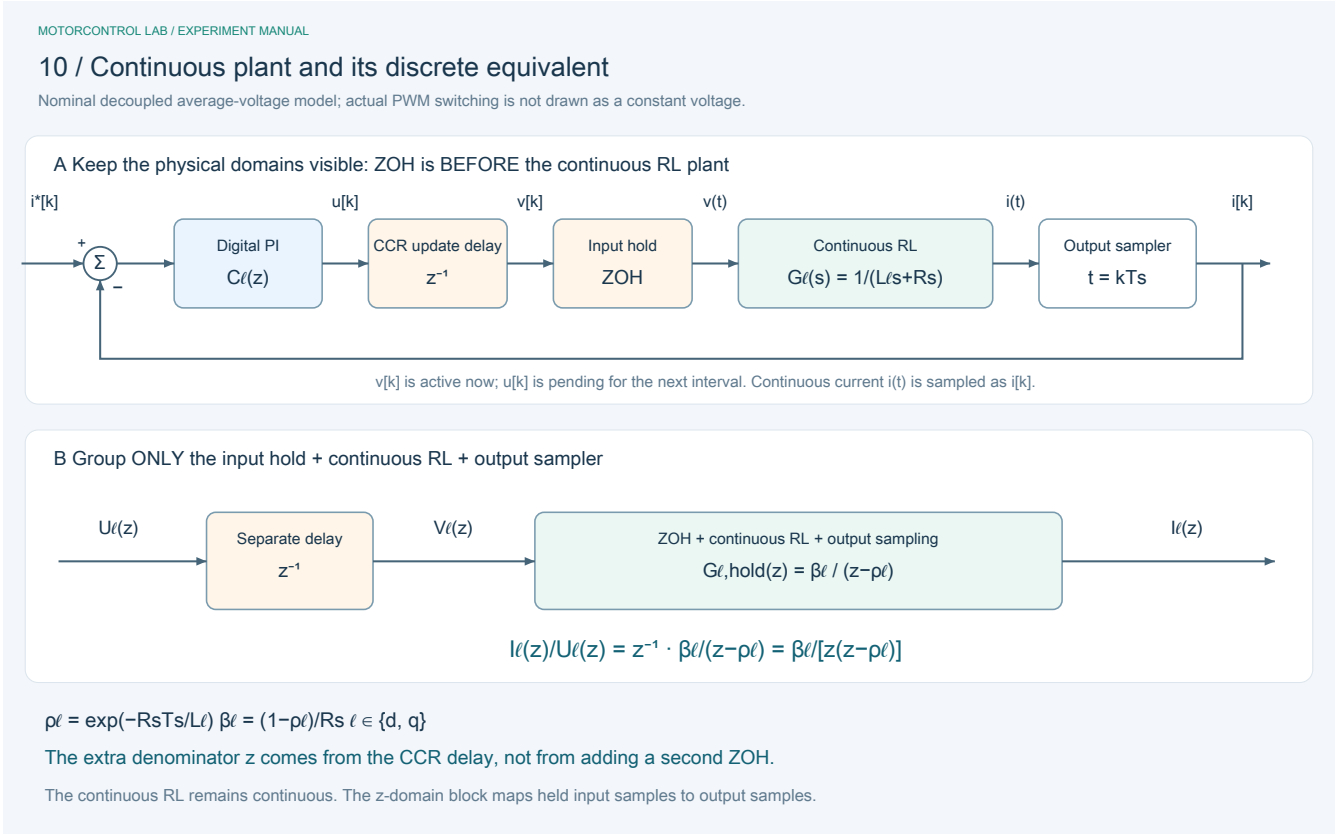

圖 10 | 上方保留 ZOH、連續 plant 與取樣器的實際位置；下方把這三者合併成離散等效，額外一拍 CCR 更新延遲仍保留在等效方塊外。

6.2.2 用積分因子逐步求出 a、b：從微分方程到差分方程

微分方程描述連續時間的變化率；差分方程描述相鄰取樣時刻的數值關係。 這裡不是直接把 di/dt 換成有限差分，而是在每個 ZOH 保持區間把連續微分方程精確解完，最後才取樣。

為了直接看清小寫 a、b 的來源，本小節暫時省略 d / q 軸下標，令 L 表示該軸電感；最後再對回本章的 ρℓ、βℓ。假設 Rs>0、L>0、Ts>0。

步驟 1 | 寫出本週期的連續方程與已知初值。 在第 k 個週期內，ZOH 使電壓保持為 v[k]。定義局部時間 τ=t−kTs，並把這段電流寫成 ĩ(τ)=i(kTs+τ)，所以：

$$L\frac{d\tilde{i}(\tau)}{d\tau} + R_s\tilde{i}(\tau) = v[k], \qquad \tilde{i}(0) = i[k], \qquad \tilde{i}(T_s) = i[k+1].$$

令 r=Rs/L，單位 s⁻¹。方程兩邊除以 L：

$$\frac{d\tilde{i}}{d\tau} + r\tilde{i} = \frac{v[k]}{L}, \qquad r = \frac{R_s}{L}.$$

在此區間內，v[k]、Rs、L 都是常數；變動的是連續電流 ĩ(τ)。

積分因子法是什麼？為什麼要乘這個函數？ 這是解一階線性微分方程的方法。目的是利用「乘積微分法則」，把原本分開的兩項變成一個乘積的導數，接著就能直接積分。先假設要乘上一個未知函數 μ(τ)：

$$\mu(\tau)\frac{d\tilde{i}}{d\tau} + r\mu(\tau)\tilde{i} = \frac{v[k]}{L}\mu(\tau).$$

乘積微分法則則給出：

$$\frac{d}{d\tau}\left[\mu(\tau)\tilde{i}(\tau)\right] = \mu(\tau)\frac{d\tilde{i}}{d\tau} + \frac{d\mu}{d\tau}\tilde{i}(\tau).$$

對照兩式，要讓左邊完全相同，就選擇 dμ/dτ=rμ。取最簡單的解 μ(τ)=exp(rτ) 即可，因為指數函數的導數正好是 r exp(rτ)。乘上任意非零常數也可以，但最後會消掉，因此取常數為 1。這個因子是由乘積微分法則決定的，不是任意猜一個指數。

步驟 2 | 乘上積分因子 exp(rτ)。 使用乘積微分法則，左邊兩項恰好可以合成一個完整導數：

$$e^{r\tau}\frac{d\tilde{i}}{d\tau} + re^{r\tau}\tilde{i} = \frac{v[k]}{L}e^{r\tau},$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[e^{r\tau}\tilde{i}(\tau)\right] = \frac{v[k]}{L}e^{r\tau}.$$

這一步就是指數函數出現的原因：RL 自然響應的一階衰減率是 r=Rs/L，而 exp(rτ) 可以把原方程整理成容易積分的形式。

步驟 3 | 從本週期起點 0 積分到下一個取樣點 Ts。 左邊積分後只剩端點值；右邊利用 v[k] 是常數：

$$\left[e^{r\tau}\tilde{i}(\tau)\right]_0^{T_s} = \frac{v[k]}{L}\int_0^{T_s} e^{r\tau}\,d\tau.$$

左邊的定積分怎麼算？ 令 F(τ)=exp(rτ)ĩ(τ)。微積分基本定理說明：「導數從 0 到 Ts 的積分，等於原函數在上限的值減去下限的值」。因此逐項寫開為：

$$\begin{aligned}\int_0^{T_s}\frac{d}{d\tau}\left[e^{r\tau}\tilde{i}(\tau)\right]d\tau &= \left[e^{r\tau}\tilde{i}(\tau)\right]_0^{T_s}\\ &= e^{rT_s}\tilde{i}(T_s) - e^{r\cdot 0}\tilde{i}(0)\\ &= e^{rT_s}i[k+1] - i[k].\end{aligned}$$

方括號的下標 0、上標 Ts 表示「代入 Ts，再減去代入 0」，不是再乘上 Ts。因為 exp(0)=1，所以第二項只剩 i[k]。局部時間 τ=0 是第 k 週期的起點，不代表電流為零；只有另行指定零初始條件時，i[k] 才可能是零。

請留意容易看錯的符號：左邊是 exp(rTs)·i[k+1]−i[k]，不是 i[k+1]/(rTs)−i[k]。 係數 1/r 會出現在右邊指數函數的反導函數裡，兩邊的計算來源不同。

右邊的積分怎麼算？ v[k]/L 在本週期固定，可以移到積分號外。因為 d[exp(rτ)/r]/dτ=exp(rτ)，所以：

$$\int_0^{T_s} e^{r\tau}\,d\tau = \left[\frac{e^{r\tau}}{r}\right]_0^{T_s} = \frac{e^{rT_s}-1}{r}.$$

因為 Lr=Rs，並代入端點 ĩ(0)=i[k]、ĩ(Ts)=i[k+1]，得到：

$$e^{rT_s}i[k+1] - i[k] = \frac{v[k]}{Lr}(e^{rT_s}-1) = \frac{v[k]}{R_s}(e^{rT_s}-1).$$

步驟 4 | 兩邊乘 exp(−rTs)，再整理成「下一點 = 舊電流衰減後的值 + 本期輸入作用」。

$$\begin{aligned} i[k+1] &= e^{-rT_s} i[k] + \frac{1 - e^{-rT_s}}{R_s} v[k] \\ &= e^{-R_s T_s / L} i[k] + \frac{1 - e^{-R_s T_s / L}}{R_s} v[k]. \end{aligned}$$

現在把 i[k] 前面的係數命名為 a，把 v[k] 前面的係數命名為 b，便得到所求的差分方程：

$$\boxed{i[k+1] = a\, i[k] + b\, v[k]}, \qquad \boxed{a = e^{-R_s T_s / L}, \quad b = \frac{1 - e^{-R_s T_s / L}}{R_s} = \frac{1 - a}{R_s}}.$$

a 不是憑空指定的係數，而是原本電流經過一個 Ts 後剩下的比例；b 是本週期保持電壓對下個電流樣本的作用係數。 a 是無因次，b 的單位是 A/V，故兩項最後都是電流。

也可以用電氣時間常數 τe=L/Rs 來讀這個結果：

$$\tau_e = \frac{L}{R_s}, \qquad a = e^{-T_s / \tau_e}, \qquad i[k+1] = a\, i[k] + (1 - a) \frac{v[k]}{R_s}.$$

其中 v[k]/Rs 是「若本期電壓一直保持下去，電流最終會趨近的穩態值」。上式說明：一個週期後的電流，保留 a 倍舊電流，同時往新的穩態值前進 1−a 的比例。正參數下 0<a<1，因此這不是把電流瞬間跳到 v[k]/Rs。

步驟 5 | 對回本章符號與 UI 預設值。 本小節的 a、b，就是第 ℓ 軸的：

$$a = \rho_\ell = e^{-R_s T_s / L_\ell}, \qquad b = \beta_\ell = \frac{1 - \rho_\ell}{R_s}, \qquad i_\ell[k+1] = \rho_\ell i_\ell[k] + \beta_\ell v_\ell[k].$$

以 q 軸 Rs=1.2 Ω、Lq=0.0125 H、Ts=100 μs 為例，電氣 RL 時間常數 Lq/Rs≈10.4167 ms，a≈0.9904459329，b≈0.0079617226 A/V。注意，這是連續 RL plant 的電氣時間常數，不是先前 PI 極零點對消後的閉環時間常數 1 ms，也不是等效延遲 0.15 ms。

本週期條件	下一個樣本的結果	係數的意義
v[k]=0，i[k]=1 A	i[k+1]=a·1 A≈0.9904459329 A	a 表示沒有外加電壓時，電流自然衰減後留下的比例
v[k]=1 V，i[k]=0	i[k+1]=b·1 V≈0.0079617226 A	b 表示一個保持週期內，1 V 電壓從零電流產生的電流變化

到此仍未加入額外一拍 CCR 更新延遲。 此處 v[k] 是當期已經生效的保持電壓。若改成 PI 新算出的 u[k]，再依第 6.2.4 節代入 v[k]=u[k−1]；不要在求 a、b 的這一步把兩種命令混在一起。

6.2.3 對差分方程取 z 轉換，得到 β/(z−ρ)

令初始電流為零，並以 Iℓ(z)、Vℓ(z) 表示 iℓ[k]、vℓ[k] 的 z 轉換。因為 iℓ[k+1] 的轉換是 zIℓ(z)，所以上式變成：

$$z I_\ell(z) = \rho_\ell I_\ell(z) + \beta_\ell V_\ell(z).$$

移項並取輸出 / 輸入比值：

$$(z - \rho_\ell) I_\ell(z) = \beta_\ell V_\ell(z), \qquad \boxed{G_{\ell,hold}(z) \equiv \frac{I_\ell(z)}{V_\ell(z)} = \frac{\beta_\ell}{z - \rho_\ell}}.$$

到這一步，尚未加入額外的計算 / CCR 更新延遲。 這個模型的輸入是當期就已生效的 vℓ[k]；電流從 iℓ[k] 演化到下一次取樣 iℓ[k+1]，正是連續 RL 在一個保持區間內的作用。

同一式也可寫成：

$$G_{\ell,hold}(z) = \frac{\beta_\ell z^{-1}}{1 - \rho_\ell z^{-1}}.$$

這是相同傳遞函數的兩種代數寫法，不是看到這裡的 z^{-1} 就再多算一次 CPU 延遲；它來自狀態差分式的時間索引與受控體演化。額外的排程延遲要看「當期計算的新命令是否在當期生效」，下一節才加入。

6.2.4 為何總分母又多一個 z？因為新命令下一個週期才生效

現在區分兩個不同的電壓序列：

符號	意義	本版時序
uℓ[k]	PI 在第 k 次取樣後算出的新電壓命令	pending，要給下一個週期
vℓ[k]	第 k 個週期實際送進前端 ZOH 的生效電壓命令	active，來自上一輪的 uℓ[k−1]

因此，本版「下一個 valley 才套用」的規則就是：

$$v_\ell[k] = u_\ell[k-1], \qquad V_\ell(z) = z^{-1}U_\ell(z).$$

這裡才是額外的一拍 CCR 更新延遲。原本的 Gℓ,hold(z) 是從 Vℓ 到 Iℓ；若現在改問「新算出的 Uℓ 到量到的 Iℓ」，便必須乘上 Vℓ/Uℓ=1/z：

$$\boxed{\frac{I_\ell(z)}{U_\ell(z)} = \frac{1}{z}\,\frac{\beta_\ell}{z-\rho_\ell} = \frac{\beta_\ell}{z(z-\rho_\ell)}}.$$

所以原圖裡「分母額外的 z」不是憑空出現、不是因為電感多了一個狀態，也不是再做一次 ZOH；它來自新算的命令要延後一個 Ts 才能進入原本的保持器。把 vℓ[k]=uℓ[k−1] 直接代回狀態式，也會得到同樣結果：

$$i_\ell[k+1] = \rho_\ell i_\ell[k] + \beta_\ell u_\ell[k-1].$$

用最前面幾個樣本看差別。 令初始電流與舊命令皆為零，並從 k=0 起施加固定的新電壓測試命令 U0=1 V；此例只測電壓到電流通道，先不閉合 PI：

取樣時刻	新命令當期立即生效，沒有額外一拍延遲	新命令下一期才生效，本版時序
k=0，t=0	i[0]=0	i[0]=0
k=1，t=Ts	i[1]=βℓ·U0	i[1]=0，第一個週期仍用舊電壓 0
k=2，t=2Ts	i[2]=βℓ(1+ρℓ)U0	i[2]=βℓ·U0

這個「第一個非零電流樣本再晚一格」就是兩個傳遞函數之間額外 1/z 的效果。它與 RL 自身需要經過時間才改變電流，是兩件應分開辨認的事。

6.2.5 再把離散 PI 接回去，才得到開迴路與閉迴路

第 6.1 節已定義本版先輸出、後更新積分的控制器：

$$C_\ell(z) = K_{p\ell} + \frac{K_{i\ell} T_s}{z-1}.$$

令 $E_\ell(z) = I_\ell^*(z) - I_\ell(z)$，PI 輸出 $U_\ell(z) = C_\ell(z) E_\ell(z)$。沿著「PI → 一拍延遲 → ZOH / RL / 輸出取樣」的負回授迴路相乘：

$$\boxed{\mathcal{L}_\ell(z) = C_\ell(z)\,\frac{1}{z}\,G_{\ell,hold}(z) = \left(K_{p\ell} + \frac{K_{i\ell} T_s}{z-1}\right)\frac{\beta_\ell}{z(z-\rho_\ell)}}.$$

這裡使用花體 $\mathscr{L}(z)$ 代表開迴路，以免和電感 L_ℓ 混淆。單位負回授閉合後：

$$T_\ell(z) \equiv \frac{I_\ell(z)}{I_\ell^*(z)} = \frac{\mathcal{L}_\ell(z)}{1 + \mathcal{L}_\ell(z)}.$$

在 Bode 分析時，以 $z = \exp(j\omega T_s)$、$\omega = 2\pi f$ 評估頻率響應。此離散等效描述的是取樣時刻的電流響應；沒有聲稱整個取樣區間內的連續電流變成一階階的常數。

ZOH 與額外一拍已經各算一次。 不應再在 $\mathscr{L}(z)$ 上重複加入半個 PWM 週期或 $\exp(-1.5 s T_s)$。第 5.4.2 節的 1.5Ts 是另一種連續低頻平均近似，不能再疊加到這個精確取樣模型上。

6.2.6 舊版符號對照與預設 q 軸數值

舊版的「a 軸」原意是泛指 $a \in \{d, q\}$，不是三相 abc 的 a 相；舊版又同時用 La 表示電感與開迴路，容易混淆。本節改用以下清楚分開的記號：

舊版符號	本節記號	真正意義
La，沒有 (z)	L_ℓ	d 或 q 軸電感，單位 H
aa	ρ_ℓ	$e^{-R_s T_s / L_\ell}$，狀態衰減係數
ba	β_ℓ	$(1-\rho_\ell)/R_s$，保持電壓的離散輸入係數
La(z)	$\mathscr{L}(z)$	整個電流負回授迴路的開迴路傳遞函數，不是電感
Ga,ZOH(z)	$G_{\ell,hold}(z)$	前端 ZOH + 連續 RL + 輸出取樣的等效，尚未包含額外一拍更新延遲

以預設 q 軸 $R_s = 1.2\ \Omega$、$L_q = 0.0125$ H、$T_s = 100\ \mu$s 為例：

$$\rho_q = e^{-0.0096} \approx 0.9904459329, \qquad \beta_q = \frac{1-\rho_q}{1.2} \approx 0.0079617226\ \mathrm{A/V}.$$

因此，從已生效電壓 Vq 到取樣電流 Iq 是 βq/(z−ρq)；從當期新算出的電壓 Uq 到 Iq 才是 βq/[z(z−ρq)]。切換 d 軸時，只需改用 Ld、Kpd、Kid，推導方式相同。

6.2.7 「網頁上的電流迴路 Bode 圖」到底是什麼

舊文簡寫的「頁面電流 Bode」不是一個特殊物理量，這個用語確實不夠清楚。它的完整意思是：MotorControl Lab 網頁的 Loop Bode Analysis 區域，針對 d 軸與 q 軸電流控制迴路顯示的幅頻 / 相頻曲線。 Bode 是頻率響應圖，不是某一種「頁面電流」。

圖表中的 D-axis current loop、Q-axis current loop，各自用本節的 $\mathscr{A}(z)$ 計算開迴路，並用 $T\ell(z)=\mathscr{A}/(1+\mathscr{A})$ 計算閉迴路。這些曲線是名義模型的分析結果，不是直接從電流時間波形做 FFT 得到；也不是三相 a 相電流本身。

它們一直使用本節的含延遲離散模型，不會因 Speed model 選 Ideal Inner Current Loop 就變成 Tq=1；Speed model 只切換速度 / 位置 Bode 所採的內環模型。這些名義分析仍忽略切換 ripple、dead-time、限幅與 AW 的非線性。

推導概念可對照 MathWorks：ZOH 的連續 / 離散等效 與 Unit Delay：一拍對應 z^{-1}。

6.3 Valley k 的事件順序

1. 套用上一個 valley 計算的 pending CCR，成為 active CCR[k]。
2. 同步鎖存相電流與 Encoder angle，產生 ADC[k]。
3. 需要時更新位置 / 速度控制器。
4. 執行 Clarke、Park、current PI、解耦、向量限幅、Inverse Park、SVPWM。
5. 計算 pending CCR[k+1]；到下一個 valley 才啟用。
6. 本週期 plant 由 active CCR[k] 對應的 switching voltage 驅動。

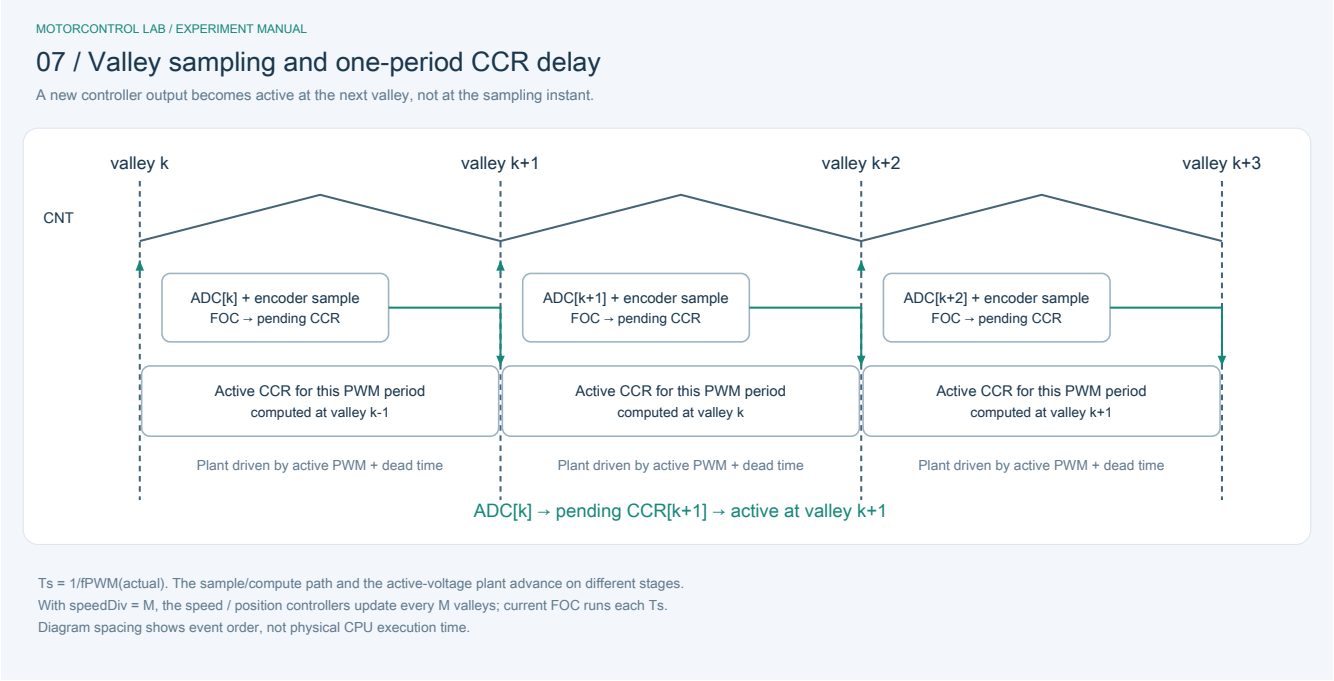

圖 07 | Valley 取樣、pending CCR 與下一週期套用時序。藍色為控制器、橙色為限幅或 AW、綠色箭頭為前饋；實線箭頭表示訊號方向。

預設 M=1，速度與電流 PI 都以 10 kHz 更新；增加 speedDiv 僅降低外環更新頻率。數位速度模型沒有再加一個額外外環運算延遲；其轉矩輸出於外環更新後送進當次 current FOC，而 current FOC 仍有既定一週期延遲。

7. 波形與診斷讀法

7.1 控制響應 / Overview

波形	訊號與單位	讀法
Speed response	Speed ref、Speed actual；rpm	ref 是限幅後 ωcmd 換算為 rpm，不一定等於原始速度目標；Current Mode 隱藏此圖
dq current control	Id、Iq、Id、Iq；A	實際 dq 狀態與有效命令；iq* 已經 q 電流限制
Three-phase currents	Ia、Ib、Ic；A	實際瞬時相電流；堵轉時不一定是隨時間旋轉的三相正弦
Electromagnetic torque / load	Te raw、Te limited、Te actual、TL；N·m	命令、轉矩限制與實際轉矩；Current Mode 的速度環轉矩命令為旁路值，不應當作實際轉矩目標
Position servo	θm*、θm；rad	θm* 是軌跡 θref，不是瞬間跳到最終 target；僅 Position
Trajectory speed / command	ωref、ωm、ωcmd；rad/s	區分規劃速度、實際速度、含位置修正與限速的命令
Trajectory acceleration	αref；rad/s²	前饋使用的規劃加速度；不是實際 dωm/dt
Torque command contributions	Te feedback、Jα FF、Bω FF、Total raw、Limited；N·m	前饋曲線已包含其開關與增益
Position following error	θref−θm；rad	相對移動中的軌跡誤差，而不是 final target−θm

電流控制模式即使 iq 為常數，Te 仍可能受 id、Ld−Lq 及 ripple 影響。不要用「速度沒變」推論堵轉時沒有電磁轉矩。

7.2 Sensored feedback chain

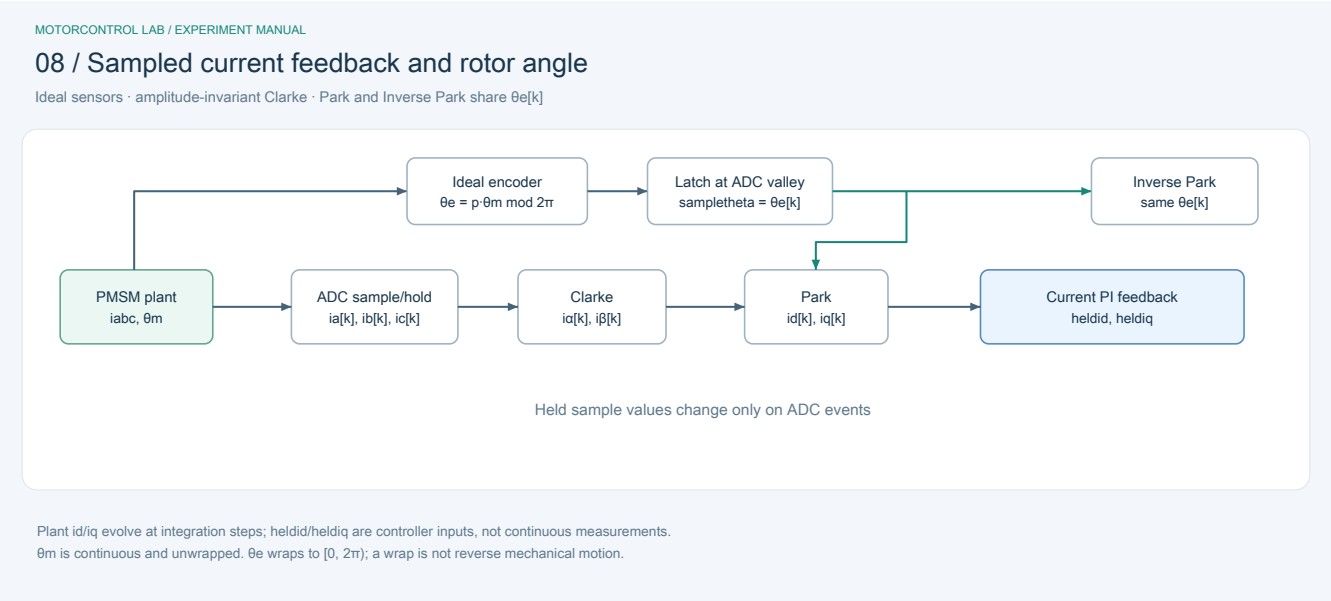

圖 08 | ADC、Clarke、Park 與同步鎖存電角度的回授鏈。藍色為控制器、橙色為限幅或 AW、綠色箭頭為前饋；實線箭頭表示訊號方向。

波形	說明
ADC sampled phase currents	sampleia / b / c：ADC 事件鎖存，直到下次取樣保持不變
Clarke / stationary current frame	ialpha、ibeta：由 sampled 相電流轉換的保持值
Park feedback vs plant dq state	heldid / heldiq 是控制器看到的回授；id / iq 是連續 plant 狀態
Encoder / mechanical and electrical angle	θm 連續角；θe wrap 至 [0,2π)；sampletheta 為取樣電角
Inverse Park voltage commands	Vα、Vβ：向量限幅後、送往 SVPWM 的命令，不是實際相電壓
ADC hold detail	最後 8 個 PWM 週期的 sampled / plant 對照，適合觀察取樣保持

θe 的鋸齒跳回是角度 wrap，不是轉子倒轉。θm 不 wrap，應用於判斷多圈位置。

7.3 Controller Output / Anti-Windup

每一控制事件的診斷值在下次更新前保持；總覽仍可能降採樣。點選圖例可隱藏不需要的曲線。

d / q 軸 PI / vector saturation：

圖例	d / q CSV 欄位	意義	單位
P term	dp / qp	Kp·e	V
I state (used)	di / qi	本次形成輸出時使用的 x[k]	V
PI raw	dpi / qpi	P+I，未加入解耦	V
Decoupling voltage	dff / qff	電角速度交叉項補償與 back-EMF 補償	V
Pre-vector voltage	draw / qraw	PI raw + decoupling	V
Post-vector voltage	dsat / qsat	共享向量限幅後命令	V
AW correction	daw / qaw	啟用時 Kaw·(post−pre)，否則 0	V/s

請成對看 dsat、qsat 的向量長度，不能僅因某一軸低於 Vmax 就認為沒有飽和。AW correction 是積分變化率的修正項，不是電壓，也不是完整積分變化率；完整變化率為 Ki·e+AW。

Post-vector voltage 還沒經過一週期 CCR 延遲、量化、switching 與 dead-time，不能稱為已施加的瞬時 plant dq 電壓。CSV 的 vd / vq 才是由實際 switching phase voltage 轉換的 dq 電壓；它們與 dsat / qsat 不會逐點相等。

Speed PI / torque limits：

圖例	CSV 欄位	意義
P term	speedP	Kpω·eω，N·m
I state (used)	speedI	形成本次 PI 輸出的積分狀態，N·m
PI raw	tefb	P+I，N·m
Total raw	teraw	PI + acceleration FF + friction FF，N·m
Torque-limited	teref	轉矩命令限制後，N·m
After current limit	speedEffective	Kt·iq*，N·m；有效命令等效轉矩，並非實際 Te
AW correction	speedAW	Kawω·(speedEffective−teraw)，N·m/s

CSV 的 speedIntegral 是更新後的 xω[n+1]，而 speedI 是本次輸出使用的 xω[n]。要檢查 P+I=PI raw，使用 speedI。

Position P / speed limit：

• Position P raw / omegafb：Kp,pos·(θref−θm)，rad/s。

• With velocity FF / positionRawSpeed：位置 P 加上速度前饋後的合成值，即 ωfb+Kvff·ωref，rad/s；此處不包含加速度前饋，後者加在轉矩支路。

• Speed-limited / speedcmd：限速後 ωcmd，rad/s。

位置環只有上述 P 與限制；圖中沒有位置 I 或位置 AW。

7.4 Switching / Dead time

波形	用途
Center-aligned CNT / CCR	CNT 與 active CCR A / B / C，單位 counts；觀察比較交點
PWM switching / ADC / apply event	Sa / Sb / Sc 邏輯、ADC 事件、CCR apply 事件；apply 表示載入 pending，即使數值恰巧相同也可為 1
Phase-to-neutral voltage	Van / Vbn / Vcn，V；已扣 floating neutral，並含啟用的 dead-time 擾動
Dead-time voltage error	ΔVan / ΔVbn / ΔVcn 是中性點重建後誤差；ΔVaO 是 A 相 pole 誤差
Switching current detail	相電流的末段 ripple；用於觀察切換與 dead-time 影響
Sample & hold / current state	末段 id / iq 與 heldid / heldiq 的差異

高速圖只保留模擬最後 8 個 PWM 週期，橫軸是該視窗起點之後的 μs；總覽橫軸是模擬起點之後的 ms。游標回到早期時刻，不代表高速圖也自動移到該時刻。

7.5 指標與資料解析度

• Final rpm / iq：最後積分狀態，不是末段平均，也不保證已到 steady state。

• Peak current：模擬積分節點上的最大相電流絕對值。

• Saturation %：向量電壓限幅發生的電流控制更新次數比例，不是 torque limit 比例。

• Cost：計算耗時，不是模擬 Duration。

• 總覽約最多 6000 點，可能漏掉 switching edge 或短暫事件；高速圖保留末段完整 plant 節點，但 switching edge 仍受 plant 步長解析度限制。

8. Bode 與 FFT 頻譜分析

1. 選擇「目前設定」或「上次模擬快照」。要解釋既有波形時，優先選快照。

2. Current Mode 僅顯示 d / q 電流迴路；Speed Mode 額外顯示速度迴路；Position Mode 再加位置迴路。

3. Speed model 選 Ideal、With current-loop dynamics 或 With digital delay（完整比較表與影響範圍見第 5.4 節開頭）。此選項只改變分析模型，不切換時間模擬引擎；電流 Bode 始終使用第 6 節數位模型。

4. 更新 Bode，查看交越頻率、PM、GM 與兩種 bandwidth。

曲線 / 欄位	定義
Open loop L	沿該負回授迴路的開環傳遞函數
Feedback Closed-Loop	L/(1+L)，不含參考前饋
Command Tracking	包含已啟用參考前饋的 reference→output；只畫幅頻曲線
Gain crossover / PM	開環 0 dB 交越與 180°+開環相位
Phase crossover / GM	開環 −180°（及後續相位分支）交越與所需增益裕度
Nyquist	該迴路取樣率一半；不是建議控制頻寬
Feedback BW	回授閉環相對自身平坦低頻增益下降 3.0103 dB 的首次向下交越
Command-Tracking BW	命令追蹤曲線依相同方式定義的頻寬

N/A 可能因沒有可靠交越、低頻不平坦、掃描結果無效，或沒有正 PM 的 gain crossover，不能直接解讀為「不穩定」，也不能解讀為「無限頻寬」。程式用頻率掃描估計裕度，並非完整穩定性證明。

Bode 不含限流、限壓、AW、dead-time、switching ripple 與完整 dq 非線性耦合。即使關閉 decoupling，頁面仍顯示理想解耦參考模型。實際已飽和時，不宜用小訊號 bandwidth 預測大步階收斂時間。

8.1 FFT：從時域波形觀察頻譜

FFT / 頻譜分析位於 Waveform instruments 與 Loop Bode Analysis 之間。它分析「上次已完成模擬」所記錄的時域訊號，不是 Bode 名義模型，也不是對 Bode 曲線再做 FFT。電流、電壓、轉矩、速度、位置、軌跡、控制器 / AW 診斷與 PWM / 計時器欄位皆可選擇，另提供由 rpm 換算的機械角速度 omega_m（rad/s）。

8.1.1 操作步驟與目前預設值

1. 執行一次模擬，再移至 FFT / 頻譜分析。

2. Data Source 預設為 Overview (decimated)，亦即「全程總覽（降採樣）」。先選擇要分析的訊號，例如 Ia [ia]、Vd actual [vd] 或 I state [qi]；中括號是實際資料欄位名稱，旁邊標示單位。

3. 設定 FFT start / FFT end，單位為 ms。切換資料來源或取得新的模擬結果時，時間範圍會重設為該來源可用的完整範圍。

4. 選擇窗函數；預設 Hann，亦可選 Blackman 或 Rectangular。預設勾選 Remove mean (DC)，在加窗前先扣除所選樣本的平均值。

5. 按 Analyze FFT / 計算 FFT，檢查頻譜、Fs、Nyquist、Δf、實際樣本範圍與樣本數；可用圖表的縮放功能檢視局部頻段。

6. Spectrum scale 可切換峰值幅度、Amplitude (dB re 1 unit) 或 PSD。此切換沿用同一次計算；修改訊號、來源、時間範圍、窗函數或移除平均值設定後，需重新計算。

7. 按 Export FFT CSV 匯出所有頻點與分析 metadata。若只是修改馬達 / 控制器參數而沒有重跑，FFT 仍分析舊的模擬快照，不會把新參數冒充成新的量測結果。

設定	目前預設	意義
Data Source	Overview (decimated)	預設先觀察較長時間紀錄；仍有降採樣混疊限制
Signal	Ia [ia] · A	A 相電流；其他欄位可由下拉選單選擇
Start / End	來源的可用完整範圍	以 ms 輸入；不是模擬器的命令 Start / Duration
Window	Hann	降低截斷邊界造成的頻譜洩漏，但會展寬主瓣
Remove mean (DC)	啟用	扣除所選片段的平均值；不等於移除所有低頻變化
Spectrum scale	Peak amplitude	訊號原單位的單邊峰值幅度，不是 RMS

8.1.2 Overview 與 High-speed 的取樣限制

資料來源	實際紀錄	適合觀察與限制
Overview (decimated)，預設	涵蓋整次模擬的降採樣資料，約最多 6000 個規則取樣點，另可能有末端點	時間較長，可先觀察電流、電壓或控制響應的低頻成分與啟動暫態。沒有抗混疊濾波，高頻切換成分可能折入低頻；不可當成精確、經低通濾波的量測。
High-speed (last 8 PWM periods)	模擬最後 8 個 PWM 週期的完整 plant 積分節點	適合檢查切換相關頻率成分；紀錄太短時，無法解析馬達的低頻電氣基波。若模擬本身短於 8 週期，則僅有實際存在的資料。

FFT 的 Fs 是「所選來源的實際資料取樣率」，不是直接把 PWM 頻率或 timer clock 當成 Fs。令相鄰樣本間距為 Δt，選入的樣本數為 N：

$$F_s = \frac{1}{\Delta t}, \qquad T_{record} = N\Delta t, \qquad \Delta f = \frac{F_s}{N} = \frac{1}{T_{record}}, \qquad f_{Nyquist} = \frac{F_s}{2}.$$

Δf 是頻點間距；窗函數主瓣寬度也會影響兩個相近頻率能否分開，不能只看 Δf。第一個至最後一個樣本相隔 (N−1)Δt，而上述頻率網格使用的紀錄長度為 NΔt；UI 會分別顯示實際起訖時間與 NΔt。

本版不補零，也不為湊成 2 的次方而裁掉整段資料；每次需有 8 ~ 262144 個樣本。總覽為保留模擬末端，可能額外存入不在規則網格上的最後一點；FFT 會省略這個較短末端間隔的樣本，並顯示「省略的不等間距末端樣本」數目。其他不等間距情況會拒絕分析，不會默默插值或混接 slow / fast 資料。

選 Overview 改善的是可用紀錄長度，不代表增加原始取樣率，也不代表已消除混疊。 分析穩態基波時，應先確認訊號已接近穩態，並選擇含多個電氣週期的時間範圍。整次啟動、負載加入及轉速變化混在一起的 FFT，描述的是該段非穩態紀錄，不是某個末端工作點的單一基頻。縮短區間會降低頻率解析度；這是取捨，不是多按一次計算就能改善。

8.1.3 窗函數、幅值、dB 與 PSD

令 x[n] 為所選訊號，w[n] 為窗函數。勾選移除平均值時，以 x[n]−平均值取代 x[n] 後，再計算下式；未勾選則直接使用原訊號：

$$X_w[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w[n]e^{-j2\pi kn/N}, \qquad f_k = \frac{kF_s}{N}, \quad 0 \le k \le \lfloor N/2 \rfloor.$$

窗函數	本版使用的週期窗	讀法
Hann，預設	0.5−0.5 cos(2πn/N)	一般頻譜觀察的起點；降低邊界洩漏，主瓣比矩形窗寬
Blackman	0.42−0.5 cos(2πn/N)+0.08 cos(4πn/N)	較低旁瓣，代價是更寬主瓣
Rectangular	w[n]=1	不加權截斷；相干取樣可準確讀幅值，非整週期截斷時洩漏較明顯

單邊峰值幅度使用窗函數 coherent gain 修正。定義倍率 c_k 後，幅值與 PSD 為：

$$c_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \text{ or } (N \text{ even and } k = N/2), \\ 2, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad A[k] = \frac{c_k|X_w[k]|}{\sum_n w[n]}, \qquad CG = \frac{1}{N}\sum_n w[n].$$

$$PSD[k] = \frac{c_k|X_w[k]|^2}{F_s \sum_n w[n]^2}.$$

顯示方式	單位與定義	注意事項
Peak amplitude	與原訊號相同，例如 A、V、N·m、rpm	為相干正弦的峰值幅度標定，不是 RMS；DC 與偶數 N 的 Nyquist 頻點不加倍。離頻點的正弦仍會洩漏，峰值可能偏低。
Amplitude (dB re 1 unit)	相對 1 個原訊號單位的幅值比	電流以 1 A 為基準、電壓以 1 V 為基準；不是 dBFS。dB 顯示與 CSV 的 dB 欄位下限為 −240 dB，線性幅值與 PSD 仍保留原值。
PSD	原單位平方 / Hz，例如 A²/Hz、V²/Hz	功率譜密度；頻點高度不能直接當成某條正弦的峰值幅度。

$$A_{dB}[k] = 20\log_{10}\left(\frac{A[k]}{1 \text{ signal unit}}\right).$$

Mean、RMS 與 AC RMS 皆由所選的未加窗原始片段計算；AC RMS 先扣除平均值。它們不是 FFT 圖中最高頻點的數值。「最強非 DC 頻點」只找零頻以外最大的頻點，不是基頻辨識器；當資料太短、非穩態或有混疊

時，尤其不能把這個數字直接當作馬達電氣頻率。

8.1.4 預設速度模式的 IA 範例：為何出現 1.25 kHz、0.2897 A

保持預設速度模式，選 Ia [ia]、High-speed、Hann、移除平均值及 Peak amplitude。使用本版預設模型重算，最強非 DC 頻點約為 1.25 kHz、0.289727 A。這是電流幅值，單位是 A，不是「最高電壓」。

項目	本版預設案例
PWM 頻率	10 kHz
高速取樣間距 / 取樣率	1.25 µs / 800 kHz
高速樣本數	640，最後 8 個 PWM 週期
有效紀錄長度 / 頻點間距	0.8 ms / 1.25 kHz
末端實際轉速 / 極對數	約 1008.215 rpm / 2；1500 rpm 是命令目標，不是此時實際轉速
末段電氣頻率估計	約 33.607 Hz，依實際轉速換算

$$T_{record} = \frac{8}{10000} = 0.0008\ \text{s}, \qquad \Delta f = \frac{1}{0.0008} = 1250\ \text{Hz}, \qquad f_e = \frac{p\, n_{rpm}}{60} \approx 33.607\ \text{Hz}.$$

這個視窗只涵蓋約 0.027 個電氣週期，連一個週期都沒有。FFT 頻點從 0、1250、2500 Hz 開始，無法辨認約 33.6 Hz 的基波；去平均與加窗後，短片段的緩慢變化可能在第一個非 DC 頻點最大。0.2897 A 是該短片段的頻譜幅值，不是 IA 完整週期的電流峰值，也不證明主要振盪是 1.25 kHz。

改選預設 Overview 的完整範圍時，此案例約有 5883 個有效規則樣本、Fs≈23.529 kHz、Δf≈4 Hz，較能顯示低頻分布；仍須留意降採樣混疊與啟動 / 負載暫態。若要定量確認穩態基波與諧波，應使用含多個週期且取樣 / 抗混疊條件足夠的紀錄；目前高速來源只保存最後 8 個 PWM 週期，不能藉由補零或更換窗函數把缺少的長時間紀錄補回來。

8.1.5 FFT CSV 與檢查順序

匯出檔名為 motor-lab-fft-訊號欄位-資料來源.csv。註解 metadata 包含欄位、單位、slow / fast、N、Fs、Δf、實際時間範圍、窗函數、去平均設定、統計量與本次模擬的參數快照。資料欄為 frequency_Hz、peak_amplitude、amplitude_dB_re_1_unit、PSD_unit_squared_per_Hz；即使畫面只顯示其中一種尺度，CSV 仍包含全部三種尺度。

閱讀頻譜時，依序確認：訊號與單位 → 資料來源 → 實際時間範圍 → Fs / Nyquist → Δf / 窗函數 → 是否去平均 → 穩態與否 / 混疊風險 → 峰值的物理解讀。FFT 本身不改變控制器、時間模擬或 Bode 模型。

參考：NumPy FFT 定義與正規化、SciPy periodogram 的單邊與 PSD 尺度。

9. 六個實驗

每個實驗請記錄完整參數、執行後快照及 CSV；比較時一次只改一個條件。以下設定均是在目前預設值上覆寫。

實驗一：堵轉 dq 電流階躍

目的： 排除機械加速與 back-EMF，建立電流環基準。

設定： Current、Locked Rotor、id=0、iq=5 A、TL=0、Start=0.02 s、Duration=0.25 s，其餘預設。

步驟： 執行；觀察 dq current、q 軸 PI / vector diagnostics、Encoder angle。記錄末段 iq 平均與 ripple，而非僅看 Final iq。

預期： iq 上升後保持在約 5 A，id 約 0；ωm、θm 全程為零。穩態 q 電壓約 Rs·iq=6 V，實際命令還會補償 dead-time、量化及 ripple。起點的大誤差可能造成短暫電壓飽和，並不代表穩態追蹤失敗。

思考： 為何速度為零仍有 Te？為何 iq 為 DC、相電流不一定是時間上的三相正弦？

實驗二：自由運轉、back-EMF 與失去電流追蹤

目的： 分辨 PI steady-state error 與電壓能力不足。

設定： 沿用實驗一，只改 Free Running。

預期與觀察： iq 先追上 5 A，轉矩使轉子加速；ωeψf 上升，q 解耦電壓增加；Pre-vector 與 Post-vector 逐漸分離，iq 可能下降。電流不再追蹤不必然是 PI 設計錯誤。

估計 id≈0、iq 近穩態時：

$$v_d \approx -\omega_e L_q i_q, \qquad v_q \approx R_s i_q + \omega_e \psi_f.$$

判斷電壓需求應用 sqrt(vd²+vq²)≤Vmax，不能只看 vq≤Vmax。當 iq 已掉落且電氣狀態仍變動時，以上僅供趨勢估計。

既有模型回歸參考： 40 steps/PWM、0.25 s 的同設定測試，堵轉 Final iq 約 5.002 A；自由運轉約 2973 rpm、Final iq 約 1.177 A。這些是先前模型測試值，不是本手冊保證的精確標準；目前預設為 80 steps/PWM，讀值可有差異。

實驗三：電流向量飽和與 AW on / off

目的： 直接看積分累積與回算修正。

設定： Current、Locked Rotor、Vdc=12 V、iq=30 A、Iq limit=40 A、id=0、TL=0、Start=0.02 s、Duration=0.10 s。

步驟： AW on 執行並匯出；AW off 再執行匯出。比較 q I state、PI raw、Pre / Post-vector 以及 AW correction。

預期： 持續受限時兩次都追不到 30 A；AW on 的積分狀態通常受抑制，AW off 修正恆為零且積分持續累積。較大 I state 不代表較佳控制。

量化檢查： qpi=qp+qi；qraw=qpi+qff；AW on 時 qaw=Kaw·(qsat−qraw)。若要比較解除飽和後的恢復，本頁沒有任意分段電流命令編輯器，不能用此持續高命令實驗宣稱已測得解除後 recovery time。

實驗四：速度 PI 與兩級命令限幅

目的： 理解 Speed PI 的轉矩單位，以及 AW 追蹤對象。

設定： Speed、1500 rpm、Step、Start=0.02 s、Duration=0.5 s、TL=0；Torque limit=0.10 N·m、Iq limit=12 A。其餘預設。

步驟： 比較 AW on / off 的 speedI、teraw、teref、speedEffective、speedAW。再保持 AW on，將 Torque limit 改回 1.8 N·m、Iq limit 改成 1 A，重跑。

預期： 第一組主要碰轉矩限幅；第二組有效命令轉矩上限約 Kt·1 A=0.09 N·m，teref 可能還沒到限制，但 speedEffective 已受限。檢查 speedAW 是否以有效轉矩差回算。

延伸： 恢復命令限幅，加入 0.15 N·m、0.15 s 負載，觀察速度下降、電流增加與 PI 積分補償。若電壓飽和，應同時看內環診斷，不能只用速度 PI 曲線解釋。

實驗五：位置軌跡、速度 / 加速度前饋

目的： 區分軌跡規劃、位置回授與前饋。

設定： Control Mode 選 Position Control。Target Position=1 rad、Max Velocity (position)=10 rad/s、Max Acceleration=100 rad/s²、Start=0.02 s、Duration=0.5 s、TL=0；前饋開啟時 Kvff=1、Kaff=1，Friction FF 保持關閉。

位置分段方程式、係數與 UI 參數對照詳見第 4.5.1–4.5.4 節。

Step / Ramp 到底選哪一個？ 此實驗的 Speed profile 不適用，保留預設 Step 即可。這個選項只在 Speed Control 模式決定速度命令是 Step 或 Ramp；Position 模式不讀取它。即使目前 UI 仍顯示此選項，改選 Ramp 也不會改變本實驗的位置軌跡。保留 Step 不代表位置參考直接跳成 1 rad：Position 的目標會先經軌跡產生器，依位移、最大速度與加速度自動產生三角形或梯形速度軌跡。

軌跡時間符號： ta 是加速時間（對稱減速也使用 ta）；tc 是等速時間；Tmove=2ta+tc 是參考軌跡從開始到結束的運動時間，與整次模擬 Duration 不同。本設定 ta=0.1 s、tc=0、Tmove=0.2 s，為三角形速度軌跡：0.02 s 開始、0.12 s 到達速度峰值、0.22 s 參考軌跡結束；實際馬達是否已到位、穩定，仍須看波形。

在 UI 哪裡看？ 選 Position Control，再點 Trajectory Generator，設定最大速度與最大加速度。參數面板下方可看見軌跡類型及 duration=0.200000 s（即 Tmove）；目前沒有分別顯示 ta、tc 的計算數值。時間波形選 Control response，觀察位置參考 θref、速度參考 ωref 與加速度參考 αref。

步驟： 先關閉 Velocity FF 與 Acceleration FF 執行；再只開 Velocity FF；最後兩者都開。其餘參數相同。比較 position following error、ωref / ωcmd / ωm、torque contributions。

預期： 合理前饋可降低運動中的追蹤誤差；效果受模型、限制與離散時序影響，不能保證任意增益均改善。位置 P raw 與 With velocity FF 的差值應為啟用的 Kvff·ωref。

限速延伸： 將 Position speed limit 降至 3 rad/s，觀察合成速度被限制後軌跡誤差增大；規劃 ωref 本身不因這個下游限制自動重規劃。

實驗六：取樣延遲、dead-time 與 Bode

目的： 連結數位模型與時域波形。

設定： 先回到實驗一；保留 10 kHz，觀察末段高速圖與時序游標。

步驟：

1. 對照 ADC valley、pending CCR、下一個 valley 的 active CCR，確認一週期延遲。

2. dead-time 開 / 關各跑一次，比較 ΔV、q I state、相電流 ripple；堵轉 θe=0 時，不要預期一定出現旋轉時典型的正弦過零失真。

3. Current Bode 記錄 bandwidth 與 PM；調低 PWM 頻率後重跑並更新 Bode，檢查 Ts 與 delay 的影響。

4. Speed Mode 比較三種 Bode 模型，記錄其 PM / bandwidth 差異；時間模擬引擎保持同一套實際模型。

思考： 為何同一組 PI，在連續理想模型與含 z^{-1} 延遲模型的裕度不同？提高 ARR 為何不能取代縮小 plant 積分步長？

10. 資料匯出、常見問題與實驗紀錄

10.1 CSV 使用方式

匯出檔案為 motor-lab-results.csv。開頭 # 行包含 JSON 參數與 metadata，之後為欄名；第一欄 dataset 區分 slow / fast。匯入分析工具前，跳過註解行並依 dataset 分組，不要把兩組直接串接為單調時間序列，因為末段視窗會與 slow 時段重疊。

t 單位為秒；圖上的 ms / µs 是顯示換算。rpm / ref 是 rpm；speedcmd、velocityref、omegafb 是 rad/s。theta_m / positionref 為 rad。sat 是該次保持的電壓向量限幅旗標。metadata 的飽和比例用完整控制更新計數，不能直接由降採樣 slow 的 sat 平均保證重現。

da/db/dc、ccra/b/c 是 active duty / CCR，不是當次剛計算的 pending 值。pending / active 全控制週期資料保留於頁面結果的 timing 結構，CSV 未獨立匯出 timing 陣列。

10.2 常見問題

現象	先檢查
iq 先到命令、後來下降	是否 Free Running？速度、qff 與向量電壓是否增加？
堵轉時 iq 仍追不到	Vdc、Rs·iq 需求、調變限制、PI、q 命令限制及數值解析度
Speed AW 為零但電流追不到	外環是否未碰命令限幅、但內環已電壓飽和？Speed AW 不直接追蹤實際 iq
I term 與 PI raw 加總對不上	使用輸出前的 di / qi / speedI；speedIntegral 是更新後狀態
Position 0.25 s 還沒穩定	軌跡何時完成？Duration 是否足夠？有無速度 / 轉矩 / 電壓限制？
改參數後波形沒變	是否已重新執行？Bode 是 live 還是 result snapshot？
θe 突然跳回零	正常 wrap；改看連續 θm 判斷實際位置
Bode 好看但大步階不好	小訊號模型忽略飽和、AW、switching 與非線性；檢查實際限制
出現數值發散提示	檢查增益、步長、極端參數，避免直接把數值失敗當成物理結論
引擎 / 圖表沒有載入	檢查網路、CDN、Web Worker 與瀏覽器錯誤訊息；首次載入不是完全離線

10.3 實驗報告範本

項目	填寫
實驗名稱 / 日期 / 頁面版本	
Control Mode / Mechanical Condition	
目標、Start、Duration、軌跡條件	
Rs、Ld、Lq、ψf、p、J、B	
Vdc、m、dead-time、PWM actual、ARR、Ts、Tω、plant 步長	
各環 Kp、Ki、Kaw、AW / decoupling / FF 開關	
電流 / 轉矩 / 速度限制與負載	
觀察波形、CSV 檔名、分析快照	
末段平均誤差、ripple、飽和比例	
Feedback BW / Command BW / PM / GM 與模型選擇	
觀察到的因果關係、模型假設與限制	

本軟體未模擬磁飽和、溫升、完整損耗、硬體保護與非理想位置感測。參數實驗用於理解控制與數值模型，不能把其電流命令限幅誤認為完整硬體保護模型。

11. 附錄：數位速度 / 位置模型

本節供需要對照頁面 bodeModel 的讀者使用。目標是精確說明名義數位分析，不是另建一套 switching 模型。

11.1 電流與機械聯合離散模型

理想解耦、固定 id0 下，令連續 plant 狀態 y=[iq,ωm]□：

$$\dot{y} = A_c y + B_c v_q, \quad A_c = \begin{bmatrix} -R_s/L_q & 0 \\ K_\tau/J & -B/J \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1/L_q \\ 0 \end{bmatrix}.$$

精確 ZOH 離散化：

$$\Phi = e^{A_c T_s}, \qquad \Gamma = \int_0^{T_s} e^{A_c \tau} B_c \, d\tau.$$

包含 PI 積分與 active 電壓的狀態 x=[iq,ωm,ξq,vactive]□，輸入 r 為 N·m 轉矩命令：

$$x[k+1] = Ax[k] + B_r r[k],$$

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & 0 & \Gamma_1 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & 0 & \Gamma_2 \\ -K_{iq}T_s & 0 & 1 & 0 \\ -K_{pq} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{iq}T_s/K_t \\ K_{pq}/K_t \end{bmatrix}.$$

最後一列代表新電壓到下一週期才成為 active，已內含 current computation delay。若外環每 M 次電流更新才運算一次，轉矩命令在這 M 次之間保持：

$$A_M = A^M, \qquad B_M = \sum_{k=0}^{M-1} A^k B_r, \qquad F_\omega(z_\omega) = c_\omega (z_\omega I - A_M)^{-1} B_M,$$

其中 cω=[0,1,0,0]、zω=exp(j2πfTω)。

$$C_\omega(z_\omega) = K_{p\omega} + \frac{K_{i\omega} T_\omega}{z_\omega - 1}, \quad L_\omega(z_\omega) = C_\omega(z_\omega) F_\omega(z_\omega).$$

11.2 位置狀態與速度閉環

加入 θm 後，連續 plant 狀態採 [iq,ωm,θm]，並加入 θm=ωm，以相同 matrix exponential 求得精確一個 Ts 的位置積分。將其與 current PI 積分、active 電壓組成五狀態 xp=[iq,ωm,ξq,vactive,θm]□，再 lift 至外環週期，記為：

$$x_p[n+1] = F_p x_p[n] + G_p T^*[n].$$

令 cω=[0,1,0,0,0]、cθ=[0,0,0,0,1]；加入 Speed PI 積分 ξω 後，閉速度環的六狀態矩陣為：

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} F_p - G_p K_{p\omega} c_\omega & G_p \\ -K_{i\omega} T_\omega c_\omega & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{bmatrix} G_p K_{p\omega} \\ K_{i\omega} T_\omega \end{bmatrix}.$$

速度命令到位置：

$$H_\theta(z_\omega) = [c_\theta\ 0](z_\omega I - A_{cl})^{-1} B_{cl}, \quad L_\theta(z_\omega) = K_{p,pos} H_\theta(z_\omega).$$

$$T_\theta(z_\omega) = \frac{L_\theta(z_\omega)}{1 + L_\theta(z_\omega)}.$$

頁面因此不是簡單在數位速度閉環後任意乘一個近似 1/s，而是精確累積該 held-voltage plant 的位置狀態。數位 Command Tracking 另外以平滑軌跡的解析導數關係 jω、(jω)²加入前饋，並非用後向差分替代軌跡微分；仍排除限幅與非線性軌跡產生器。

11.3 版本與核對範圍

2026-10-23 符號說明修訂：補齊第 4.1 節 Kt / Kᴛ 定義、單位與固定 d 軸條件；第 5.4 節明確展開 Tq(s)，新增圖 09；模擬程式與數值公式未修改。

手冊圖版修訂：共十張同風格 SVG（包含圖 09 的轉矩路徑與圖 10 的 ZOH / RL 等效模型）；Current / Speed / Position 圖為實際運算路徑的分層表示，第 6 圖則刻意採未飽和、忽略前饋的名義模型。兩者用途不同，應配合本文章節閱讀。

本手冊依上述日期的本機程式原始碼、控制方程、Bode 實作、波形欄位與既有模型回歸結果編寫；未因撰寫手冊而修改模擬器。本次文件核對不代表完成新的真實瀏覽器或硬體驗證。若日後修改控制路徑、預設值或資料欄位，應同步修訂本手冊。